

2020

Campos vectoriales y la teoría electrostática

Eduardo Ochoa Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán
Nicolás Zamudio Hernández





Campos vectoriales y la teoría electrostática

Una visión técnica

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán
Nicolás Zamudio Hernández

Morelia, Michoacán. México

marzo de 2020



Directorio

Dr. Raúl Cárdenas Navarro
Rector

L.E. Pedro Mata Vázquez
Secretario General

Dr. Orépani García Rodríguez
Secretario Académico

ME en M.F. Silvia Hernández Capi
Secretaria Administrativa

Dr. Juan Carlos Gómez Revuelta
Secretario Auxiliar

Dr. Rodrigo Gómez Monge
Tesorero

Dr. Héctor Pérez Pintor
Difusión Cultural y Extensión Universitaria

Lic. Luis Fernando Rodríguez Vera
Abogado General

Mtro. Rodrigo Tavera Ochoa
Contralor

Dr. Marco Antonio Landavazo Arias
Coordinador de la Investigación Científica

PRESENTA:

Campos vectoriales y la teoría electrostática

Una visión técnica

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Filo Enrique Borjas García
Rogelio Ochoa Barragán
Nicolás Zamudio Hernández

Ochoa H. E., Borjas G. F.E., et al (2020) *Campos vectoriales y la teoría electrostática: una visión técnica*. Morelia: CONALEP-CIE

Título original de la obra:

Ochoa H. E., et al. (2020) *Campos vectoriales y la teoría electrostática: una visión técnica* . Morelia: CIE/UMSNH

Copyright © 2020

Tzintzuntzán No. 173 Col. Matamoros C.P. 58240, Edificio E planta alta Morelia, Michoacán. México. MX

Teléfono (443) 3-14-28-09.

Email: eohqfb@yahoo.com.mx

ISBN: 978-607-8416-10-3



Programa: Profesor escritor.

Esta obra fue publicada originalmente en Internet bajo la categoría de contenido abierto sobre la URL: <https://cieumich.mx> mismo título y versión de contenido digital. Este es un trabajo de autoría publicado sobre Internet Copyright © 2020 por la CIE/UMSNH protegido por las leyes de derechos de propiedad de los Estados Unidos Mexicanos. No puede ser reproducido, copiado, publicado, prestado a otras personas o entidades sin el permiso explícito por escrito del CIE o por los Autores.

ISBN: 978-607-8416-10-3



Contenido

Unidad 1. El espacio vectorial

1.1. Magnitud escalar	2
1.2. Magnitud vectorial	4
1.3. El vector en \mathbb{R}^2	9
1.4. Producto interno/punto	12
1.5. El vector en \mathbb{R}^3	18
1.6. Producto cruz	23
1.7. Magnitud tensorial	25
1.8. Sistemas de coordenadas	25
1.8.1. Sistemas 2D	27
1.8.2. Sistema 3D	28
1.8.3. Sistemas de coordenadas de rotación en 2D	29
1.8.4. Sistemas de coordenadas de rotación en 3D	32
1.9. Transformaciones de coordenadas	33
1.9.1. Sistema de coordenadas rectangulares	33
1.9.2. Sistema de coordenadas cilíndricos	34
1.9.3. Sistema de coordenadas esférico	37
1.9.4. Matrices de transformación	39
1.10. Operador DEL o Nabla	44
1.11. Gradiente	44
1.12. Divergente	51
1.13. Rotor	57
1.14. Laplaciano	63

Unidad 2. Teoría electrostática

2.1. Fuerzas eléctricas y campos	66
2.2. Aislantes y conductores	68
2.2.1. Carga por conducción	69
2.2.1.1 Conexión a tierra	70
2.2.2. Carga por inducción	71
2.3. Ley de Coulomb	73
2.4. El Campo eléctrico	76
2.4.1. Líneas de campo eléctrico	78
2.4.2. ¿Qué sucede cuando tenemos dos cargas juntos?	79
2.5. Conductores en equilibrio electrostático	81
2.6. Jaula de Faraday	84
2.7 El generador de Van de Graaff	85

2.8. Ley de Gauss	89
2.8.1. Flujo eléctrico	89
2.8.2. Ley de Gauss como una Ley de Conservación	92
2.8.3. Ejemplo: El campo alrededor de una distribución esférica de carga	93
2.8.4. Ejemplo: El campo por encima de un conductor plano	95
2.8.5. Ejemplo: El campo interior y exterior de un conductor hueco esférico	97
2.8.6. Ejemplo: El campo debido a una línea de carga	100

Unidad 3. Energía eléctrica y capacitancia

3.1 Energía potencial eléctrica	104
3.2. Potencial eléctrico	108
3.2.1 Potencial eléctrico y energía potencial debida a cargas puntuales	110
3.2.2. Energía de un sistema de cargas	111
3.3. Potenciales y conductores cargados	112
3.4 Superficies equipotenciales	114
3.5. Fuentes de diferencia de potencial como circuitos elementales	115
3.6. El capacitor	116
3.6.1. Los condensadores de placas paralelas	118
3.6.2 La energía almacenada en los condensadores	120
3.6.4 Circuitos elementales de capacitores	123

Unidad 4. Ecuaciones de campo

4.1. La forma integral de la ley de Gauss	132
4.1.1. El componente de E normal a una superficie	138
4.1.2. La superficie integral	140
4.1.3. El flujo de un campo vectorial	141
4.1.4. El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada	145
4.1.4.1 La carga encerrada	148
4.1.5. La permeabilidad del espacio libre	151
4.1.5.1 Aplicaciones de la Ley de Gauss en su forma integral	153
4.2. La ley de Gauss en su forma diferencial	162
4.3. La ley de Gauss para un campo magnético	166
4.4. La ley de Faraday	166

Referencias	167
-------------	-----

Prefacio

El propósito de investigar científicamente las formas de los misteriosos fenómenos invisibles de la electricidad comenzó en el año 1888. En un improvisado laboratorio con un banco de madera y circuitos que montados emiten chispas, con ayuda de dos esferas metálicas muy cerca una de otra, con el voltaje suficiente se logró observar el salto de chispas a través del aire. No muy lejos colocó un simple lazo de alambre con una brecha muy pequeña entre sus extremos, ajustable con un tornillo. Llamó a este lazo detector, justo cuando se dan las chispas razona, ¿qué ondas de energía pasan en el circuito principal del detector?. Modificó el experimento agregando una hoja de Zinc como reflector, él sabe que cuando cualquier tipo de onda se refleja hacia su origen, se forma una onda, que parece vibrar en su lugar, como una cuerda de guitarra. Por lo tanto, las ondas son producidas por el circuito primario y reflejadas por la hoja de Zinc. Esto es exactamente lo que quería encontrar. Heinrich Hertz, profesor de Física experimental en la Technische Hochschule en Karlsruhe, ha realizado un enorme descubrimiento experimental para la ciencia, ha demostrado fuera de toda duda la existencia de las ondas electromagnéticas. Más tarde el escocés James Clerk Maxwell desarrollaría inspirado en Michael Faraday y Hertz la idea matemática de una teoría para estas ondas electromagnéticas.

Desde la época de Newton, destacados científicos habían creído que el universo estaba gobernado por leyes mecánicas. Para ellos el espacio circundante de objetos materiales fue solo algo pasivo. Maxwell y Faraday cambiaron esto, el espacio en sí mismo actuaba como transmisor de fuerza y dispositivo de energía o campo electromagnético. Pero, es Faraday el primero en hablar de líneas de fuerza, que para la época en que goza gran prestigio la obra de Newton, se burlaron y no fue hasta que Maxwell con sus matemáticas predijo, como cada vez que un imán era movido sobre una bobina, encendía una ola electromagnética en el espacio, tal como lo hace una piedra en un estanque. Cambiando la naturaleza del espacio mismo. Maxwell calculó la velocidad de las ondas, las propiedades elementales de la electricidad y magnetismo, y resultó ser la misma velocidad en que la luz había sido medida. Supuso que la luz visible es solo un pequeño grupo en un vasto espectro electromagnético. No es exagerar la escala de los logros de Faraday y Maxwell, al traer el concepto de campo electromagnético al pensamiento de los existenciales a la conciencia de la civilización. El propio Einstein se inspiró en este concepto campo, y desde

entonces se convirtió en el estándar utilizado por los físicos para modelar lo que sucede en la inmensidad del espacio y dentro de los átomos.

Este libro pretende introducir al lector en la teoría electromagnética en su apartado de electrostática, haciendo referencia a la matemática que la sustenta. Hay mucho por donde comenzar, pero sin duda la electricidad, la cotidianidad de envío de información electromagnética sobre la WiFi, redes móviles de telefonía, la propia Internet y su Web, deberían ser suficiente motivo para estudiar con enorme curiosidad, muy en lo profundo de esta apasionante área del conocimiento científico y tecnológico.

Unidad 1.

El espacio vectorial

Hay muchas maneras de introducirnos en el tema de los vectores, ese objeto que es una representación matemática de una entidad física que puede ser caracterizado por el tamaño o magnitud, y la dirección. En consecuencia, con esta definición se puede emplear para representar cantidades vectoriales por ejemplo velocidad, posición, fuerza. El propósito de aprendizaje de este objeto matemático, es introducirnos en la comprensión de vectores y tensores, dado que son ampliamente utilizados en aplicaciones avanzadas en la tecnología moderna. El antecedente a estos conceptos usted lo recibió en la educación secundaria. En ese nivel seguramente aprendió que los vectores son cantidades con magnitud y dirección, al sumarlos gráficamente, además de calcular sus componentes en las direcciones x - y - z .

El propósito es tratar con vectores desde una perspectiva desde el álgebra, derivadas vectoriales, sistemas de coordenadas y sus implicaciones en los tensores gradiente, divergente, rotor, laplaciano en el marco de la teoría electrostática.

Habilidades de aprendizaje:

1. Dominará el álgebra de vectores y su notación
2. Definirá sistema de coordenadas
3. Realizará transformaciones de sistemas de coordenadas
4. Realizará operaciones de productos vectoriales
5. Definirá y realizará operaciones con tensores: gradiente, divergente, rotor y laplaciano.

1.1 Magnitud escalar

Si tenemos un número real y una unidad de medida, por ejemplo, 4 m; 2 s; 5 kg; estamos frente a magnitudes escalares. Un número escalar es un número real, constante o complejo que nos expresa alguna magnitud física. Matemáticamente al conjunto de escalares se le llama cuerpo, campo o anillo. Un cuerpo o campo es el conjunto cerrado bajo una operación binaria de suma y multiplicación, en las que cumple con todas las propiedades de un álgebra como la aritmética.

La álgebra es un campo asombrosamente dinámico en su cambio, los estudiantes generalmente tienden a expresar por álgebra a las operaciones con polinomios, resolver sus ecuaciones hasta tercer grado y realizan cálculos de determinantes, reducciones de expresiones racionales y el estudio de las curvas asociadas a estos polinomios, la reconocen en libros de pre-cálculo. Aunque en nuestros días, la álgebra computacional gana enormes aplicaciones, se le suele marginar de ser un elemento de matemática elemental. Definir una álgebra como un cuerpo o campo cerrado bajo una operación binaria, es referirnos a ella de manera formal. Una álgebra aritmética es hecho su cuerpo de números reales, una álgebra arábica de polinomios, una compleja de números complejos, una integral de familia de funciones, una lineal de matrices,..., a todas ellas se les identifica por cumplir con alguna estructura de axiomas tales como la conmutativa, la asociativa, la distributiva, el elemento neutro y el inverso simétrico. En consecuencia todos los ejercicios algebraicos se desprenden de estos axiomas:

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = a$$

$$a + (-a) = 0$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$ba = ab$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

El objeto de aprender cualquier álgebra, por error se confunde en la educación como resolver miles y miles de ejercicios, como un modo de comprenderlo como un sistema de axiomas de cerradura, es decir, que encapsulan cualquier resultado dentro de su propio cuerpo o campo. Los axiomas suelen ser estos últimos nueve citados en líneas atrás. El error es que los estudiantes suelen quedarse solo en ejercicios y dejan de ver el panorama del poder de estos sistemas axiomáticos, o comúnmente en la matemática formal se les llama campos o cuerpos. En cuanto algo cumple con estos nueve axiomas se le llama campo, y la teoría de campos es la rama que estudia a las álgebras. El primer campo que conocemos está hecho de números reales, el segundo de polinomios, el tercero de complejos, el cuarto de funciones, el quinto de vectores, el sexto de matrices,..., y cada uno es un terreno único en sus posibilidades científicas y tecnológicas.

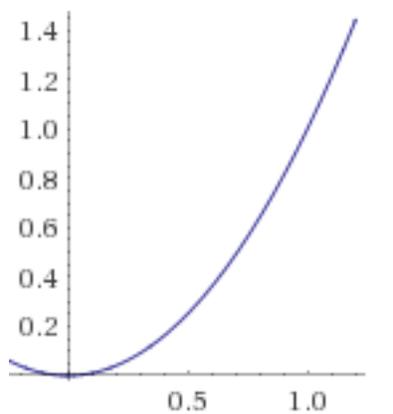
En el siglo XX se desarrollaron muchos sistemas encapsulados en apoyo computacional a la criptografía comercial, militar y científica. El dinero electrónico y las transacciones comerciales en la Internet no pueden ser posibles sin este robusto cuerpo de conocimiento. Es cierto que no todas las álgebras cumplen con los nueve axiomas ya referidos, este problema escapa a la intención de este texto, pero téngalo presente, las matemáticas modernas casi todo lo refieren a estos sistemas axiomáticos. ¿Quién hubiera pensado que casi todo el vasto mundo de las matemáticas es desprendido de estos axiomas básicos?

Pero hay otras estructuras algebraicas, por ejemplo, si una álgebra no cumple con el axioma del elemento inverso simétrico a^{-1} llamaremos a ese campo anillo (permite la existencia de fracciones, el producto en un anillo no necesariamente tiene operaciones inversas). El primer anillo que todos conocemos es el sistema de números enteros. Los números naturales (enteros positivos) no son un campo ni anillo. No queda muy claro porqué los números racionales y enteros Q y Z , son más útiles que los naturales, puesto que todas las propiedades de los números enteros o racionales se heredan de los enteros positivos. Quizá la razón sea que tienen mejor estructura algebraica en su cuerpo axiomático, en algún sentido. El anillo parece ser un buen escenario para discutir temas como la divisibilidad y los números primos, mientras que la estructura del campo es buena en geometría.

Campo escalar: representa un espacio distribuido de magnitudes escalares. El campo escalar es una función escalar $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_n)$ que define un único número, coordenada o variable escalar. Un escalar es un tensor de rango cero.

Ejemplo: dada la **función escalar** de temperatura $f(T) = T^2$ construyamos parte del espacio escalar con ayuda de una tabla de evolución:

$f(T) =$	T^2
f(1)	1
f(2)	4
f(3)	9
f(4)	1
	6



1.2 Magnitud vectorial

Las magnitudes vectoriales extienden las dimensiones escalares asociadas a dirección y sentido. Históricamente un vector surge de la idea del irlandés William Hamilton, con el nombre de cuaterniones, son la extensión del plano complejo al espacio, creando nuevas interpretaciones de la realidad física¹. Pero es Lord Kelvin quien resuelve los problemas con el manejo de los cuaterniones separando la parte real y la imaginaria, originando con ello los espacios vectoriales y su análisis dado por Grassmann², es así como nace la era vectorial. En un libro histórico de Michael J. Crowe titulado *Una Historia del análisis vectorial* y que pronto se convirtió en un libro casi obligado en las ingenierías y escuelas³ de ciencias de 1967. Sin duda las tensiones entre algebristas y geómetras encuentran su reconciliación en el análisis vectorial en 1831, surge como consecuencia de la creación y representación de los números complejos; resultado de la investigación de Leibniz de una geometría de posición y por la idea de un paralelogramo de fuerzas o velocidades. A Jerome Cardan (1545) se le atribuye la publicación del número complejo, este concepto tardó dos siglos en ser legitimado por la comunidad matemática. Ya en 1679 Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz crean la idea de una matemática que exprese directamente como álgebra **magnitudes en el espacio geométrico**, algo similar al análisis vectorial. Es el gran Isaac Newton quien en 1687 introduce en su *Principia Mathematica*, un cuerpo actuado por dos fuerzas simultáneamente, se describirá con la diagonal de un **paralelogramo** al mismo tiempo que son descritas las dos fuerzas por separado, esta idea es muy próxima al concepto de vector. En 1799 el noruego Caspar Wessel expone la representación geométrica de los números complejos, con ello inaugura la representación analítica **dirección**. Al mismo tiempo, Carl Friedrich Gauss busca el manejo de cantidades en el espacio tridimensional.

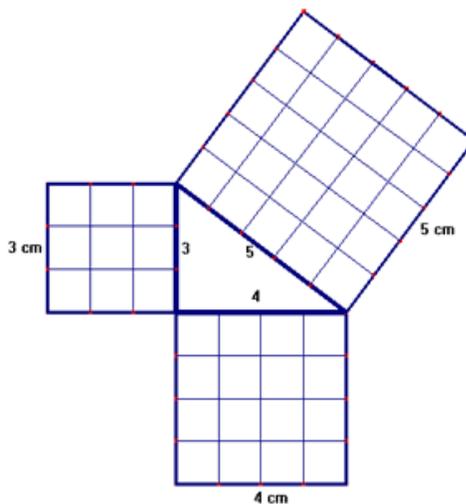
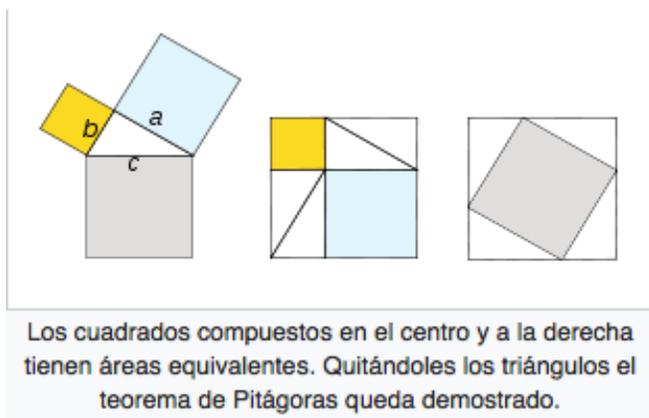
Grassmann y Hamilton se enteran en 1852 sobre los avances de Gauss, Hamilton publica en 1853 Lectura de cuaterniones. Hamilton no estuvo solo en la creación del análisis vectorial, estaban August Ferdinand Möbius, Giusto Bellavitis, el conde de Saint-Venant, Augustin Cauchy, Matthew O'Brien, y sobre todo, Hermann Günther Grassmann. Giusto Bellavitis publica su idea de **equipolente**: "Dos líneas rectas se llaman equiparadas si son iguales, paralelas y dirigidas en el mismo sentido" sus líneas de hecho se comportan exactamente de la misma manera que los números complejos, pero es importante tener en cuenta que él consideraba sus líneas como entidades esencialmente geométricas, no como representaciones geométricas de las entidades algebraicas, de hecho, él se opuso a los números complejos como "indigno de pertenecer a una ciencia basada en la razón." Bellavitis dedicó un largo periodo en un fallido intento de extender su sistema a tres dimensiones. Grassmann pone los cimientos de los productos cruz y punto vectorial, el

inglés Matthew O'Brien en 1852 es quien publica un sistema de análisis vectorial desarrollado a partir de los cuaterniones de Hamilton, no logrando la propiedad asociativa de entidades vectoriales. Alrededor de 1880, el moderno sistema de análisis vectorial llegó a existir a través de la obra de Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside, y para 1910 se había establecido como el sistema dominante. En 1867 nace el operador **Nabla**:

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$$

empleado con éxito por James Clerk Maxwell. Pero es Josiah Willard Gibbs quien introduce la notación moderna del análisis vectorial, funciones vectoriales y encuentra un eco importante en la física electromagnética de Maxwell.

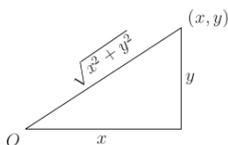
Sin duda la geometría ingresa con fuerza en las matemáticas con el teorema de Pitágoras. Este teorema afirma que el cuadrado debajo de la hipotenusa **c** de un triángulo rectángulo es igual (en área) a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.



Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pitágoras

El teorema es apenas obvio, la prueba se muestra arriba en la figura, las mitades de los rectángulos del cuadrado perfecto formado en completo a los cuadros por **a** y **b**, justo por la mitad es igual a un corto cuadro grande menos cuatro copias del triángulo referido. La respuesta a los axiomas de Euclides en su libro *Elements*, se consolida con el teorema de Pitágoras. Este enfoque, hace unos 100 años, los matemáticos consideran que el rigor y

universalidad del sistema de axiomas Euclidiano no rellena algunos huecos vacíos de la geometría. El requerir una gran cantidad de nuevos axiomas adicionales y el hecho que hay otra geometría que requieren modificar el sistema de axiomas.



Nos parece que el enfoque axiomático debe ser abandonado en la geometría y esta debe basarse en el enfoque algebraico iniciado por Descartes en el siglo XVII. En geometría algebraica, los puntos en el plano se dan por pares ordenados (x,y) números y líneas curvas son expresadas por ecuaciones polinómicas en x y y . Desde el punto (x,y) se encuentra la distancia horizontal x y la vertical y desde el origen O . Nosotros definimos la distancia como:

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

motivado por el teorema de Pitágoras.

Un círculo de radio unidad, que consiste en los puntos a distancia 1 hasta O . Tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

Mas generalmente, el círculo con centro en (a,b) y radio r tiene la ecuación

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

El problema con este enfoque algebraico es que va demasiado lejos, no hay ninguna restricción natural en las ecuaciones que precise los conceptos geométricos de Euclides. Si nos detenemos en estas ecuaciones lineales obtenemos solamente líneas; si lo hacemos para las cuadráticas obtenemos todas las cónicas, hipérbolas, elipses y parábolas. Mientras que con Euclides solo círculos. Sin embargo, hay un concepto algebraico diferente que surge, y que refiere a un lugar en el espacio geométrico: el concepto de vector, y nuevos productos tales como el producto interno y el cruz. Si bien no da la generalidad del espacio vectorial, en su lugar describe el espacio vectorial R^2 que es convenientemente para la geometría plana euclidiana. Este espacio cita a todos los pares ordenados (x,y) donde x y y pertenece a los \mathbb{R} , el conjunto de los números reales.

Se nos permite agregar una nueva regla:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

Y para multiplicar un par por cualquier número real c utilizamos la regla de:

$$c(x, y) = (cx, cy)$$

Estas operaciones tienen interpretación geométrica natural: adición (a, b) a cada (x, y) , significa trasladar el plano; es decir, cambiando todos sus puntos a través de la distancia horizontal a y distancia b vertical. Multiplicando cada (x, y) por el factor c , aumenta el plano entero por el factor c . Como veremos este ajuste simple prueba algunos teoremas geométricos interesantes. Pero para capturar todos los de la geometría de Euclides tenemos un ingrediente adicional: el producto interno, llamado también producto punto, definido por

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Note que:

$$(x, y) \bullet (x, y) = x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$$

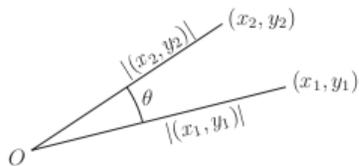
Donde (x, y) denota la distancia de (x, y) desde el origen O . Por lo tanto, el producto interno puede ser definido como la distancia de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Una vez que tenemos el concepto de distancia, también podemos obtener el concepto de ángulo, porque resulta que

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)| |(x_2, y_2)| \cos \theta$$

Donde θ es el ángulo entre

(x_1, y_1) y (x_2, y_2)

Como se muestra enseguida:



Las principales ventajas de utilizar el concepto de un espacio vectorial con el producto interno, en lugar de los axiomas de Euclides, son la familiaridad y universalidad. Las

reglas para calcular los vectores son similares al álgebra tradicional; también, el producto interno y los espacios vectoriales ocurren en muchas partes de las matemáticas, por lo que vale la pena aprender como herramienta de uso general. En resumen, hay otras geometrías distintas a la Euclidiana, por ejemplo la hiperbólica en la que el postulado de las rectas paralelas de Euclides es falso, los ángulos de un triángulo nos suman π y para una figura de un tamaño dado, no existe otra semejante de tamaño mayor.



1.3 El vector en \mathbb{R}^2

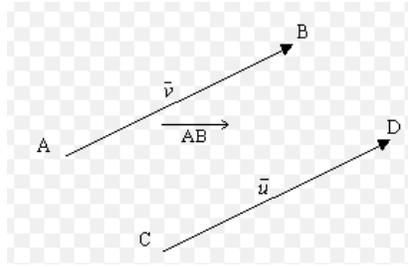
El vector se expresa como una cantidad que tiene tanto magnitud como dirección; geoméricamente es referido como un segmento de línea dirigido (con sentido dado por una flecha) expresado por símbolos en cursivas, en negritas o con una flecha por encima:

$\vec{a}, \vec{v}, \overline{CD}$



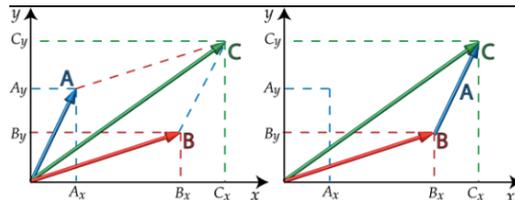
Un vector \vec{v} , tiene un punto de origen en C y cuyo punto de aplicación o destino es D, se expresa como \overline{CD} . Su magnitud está dada por norma o módulo del vector \vec{v} ,

$|\overline{CD}| = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, como la raíz cuadrada de sus componentes espaciales. Diremos que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y dirección, $\vec{v} = \vec{u}$ o $\overline{AB} = \overline{CD}$.



Es importante tener en cuenta que los vectores son libres de moverse en el espacio geométrico de un punto a otro, sin modificar magnitud y dirección, con ello facilita el cálculo algebraico en el espacio geométrico. Si cambia el sentido, pero no la magnitud y dirección, tenemos un vector negativo $-\overrightarrow{CD}$, si lo multiplicamos por un escalar diferente de cero p , obtenemos un vector de misma dirección y magnitud p veces, $p\overrightarrow{CD}$. El vector cero es un vector de cualquier dirección de magnitud cero.

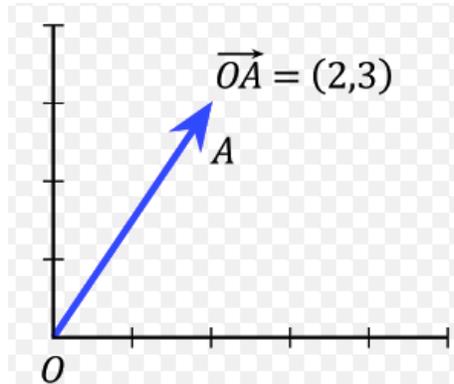
La **adición de vectores**. Los vectores pueden compartir o no un punto común de inicio, o pueden desplazarse de manera paralela para calcular la suma de ellos, y encontrar un vector resultante, $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$.



El vector resultante puede verse como la diagonal principal de un paralelogramo. Es más común trabajar con la **versión analítica de los vectores**, de una forma algebraica. La notación de un vector es:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \quad \text{o} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

donde v_x, v_y son componentes del vector \mathbf{v} . Por ejemplo, cuando un vector inicia en vector cero y termina en el punto P (2,3), se llama **vector de posición** $\vec{a} = [2,3]$



Adición de vectores, método analítico

Dados los vectores:

$$\vec{v} = [v_x, v_y] \quad y \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} + \vec{u} = [v_x + u_x, v_y + u_y]$$

Ejemplo:

$$\vec{v} = [2, 4]$$

$$\vec{u} = [-5, -1]$$

la suma es:

$$\vec{r} = [-3, 3]$$

la resta $\vec{v} - \vec{u}$ es:

$$\vec{r} = [7, 5]$$

Multiplicación de vectores por un escalar, método analítico

La multiplicación de un vector \vec{v} por un escalar \mathbf{p} diferente, es:

$$p\vec{v} = [pv_x, pv_y]$$

Ejemplo:

$$\vec{v} = [2, 4] \text{ y por el escalar } p=3$$

$$p\vec{v} = [6, 12]$$

Dos **vectores son iguales** $\vec{v} = \vec{u}$ si y solo sí, $v_x = u_x$ y $v_y = u_y$

1.4 Producto interno/punto

El producto punto, producto interno o producto escalar de dos vectores es un escalar dado por

$$\vec{v} = [v_x, v_y]$$

$$\vec{u} = [u_x, u_y]$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

Se expresa como

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = [v_x, v_y] \cdot [u_x, u_y]$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = [(v_x)(u_x) + (v_y)(u_y)]$$

Propiedades del producto interno

$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$		Si los vectores son ortogonales, el producto interno de ellos es cero
$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$		Conmutativo
$\vec{c}(\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{c} \cdot \vec{v}) + (\vec{c} \cdot \vec{u})$		Distributivo
$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} ^2 = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$		Al elevar al cuadrado un vector, también lo hace de la misma manera su módulo o norma.

Ejemplo:

$$\vec{v} = [2, 3]$$

$$\vec{u} = [4, 1]$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (2)(4) + (3)(1) = 11$$

Representa la proyección de la magnitud de la sombra de \vec{v} sobre \vec{u} . Otro camino es calcular el producto punto con la magnitud de los vectores y el ángulo entre ellos.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

El **ángulo de un vector** \vec{v} en \mathbb{R}^2 , es dado por:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

$$\theta_v = \tan^{-1} \left(\frac{3}{2} \right) = 56.31^\circ$$

$$\theta_u = \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) = 14.03^\circ$$

$$\theta = 56.31^\circ - 14.03^\circ = 42.28^\circ$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cos(42.28)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sqrt{221} \cos(42.28)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 14.86 \cos 42.28^\circ = 14.86(0.74) = 10.99 \approx 11$$

Nota: El resultado es aproximado porque las raíces nos dan decimales infinitos.

Con ayuda de Wolfram alpha (<http://www.wolframalpha.com>) un vector se introduce así como lo indica la siguiente imagen para saber su información. Por ejemplo para nuestros vectores anteriores \mathbf{v} y \mathbf{u} .

vector [2,3]



Examples Random

Polar coordinates:

Approximate form

$$r = \sqrt{13} \text{ (radius), } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \text{ (angle)}$$

$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function »

vector [4,1]



Examples Random

Polar coordinates:

Approximate form

$$r = \sqrt{17} \text{ (radius), } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \text{ (angle)}$$



$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function »

VectorAngle [[2,3], [4,1]]



Examples Random

Input:

VectorAngle[{2, 3}, {4, 1}]

Result:

More digits

$$\cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{221}}\right) \approx 0.737815$$

$\cos^{-1}(x)$ is the inverse cosine function »

0.737815 radians



Examples Random

Input interpretation:

0.737815 radians

Unit conversions:

More

737.815 mrad (milliradians)

42.2737° (degrees)

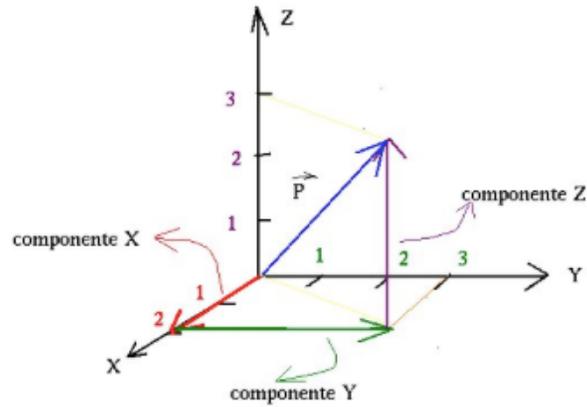
42 degrees 16 arc minutes 25 arc seconds

2^h 49^m 5.7^s (right ascension)

0.469708 quad (quadrants)

Son 42.2737° entre los vectores.

Al **método del paralelogramo** también se le conoce como método de triángulos y polígonos por descomposición de componentes rectangulares. Dados dos puntos



En papel cuadrulado dibujamos los vectores posición

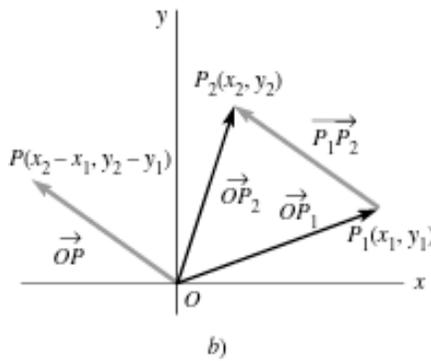
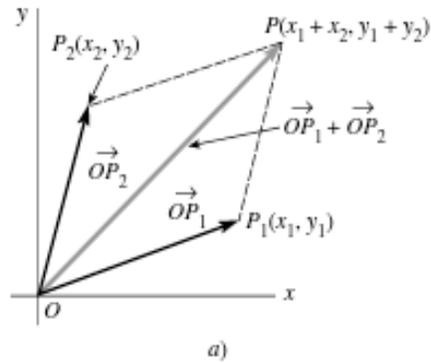
$$\overrightarrow{OP_1}[x_1, y_1]$$

$$\overrightarrow{OP_2}[x_2, y_2]$$

Puede verse que el vector $\overrightarrow{OP}[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$

es igual al vector $\overrightarrow{P_1P_2}[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$

por tener la misma magnitud y dirección.



Dado que los vectores son magnitudes que responden a un álgebra, sus propiedades son

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{c}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{c}$$

$$\vec{v} + 0 = \vec{v}$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$$

$$c(\vec{v} + \vec{u}) = c\vec{v} + c\vec{u}$$

$$\vec{v}(c_1 + c_2) = \vec{v}c_1 + \vec{v}c_2$$

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

$$0\vec{v} = 0$$

Ley conmutativa

Ley asociativa

Neutro bajo la suma (vector cero)

Inverso aditivo

Donde c es un escalar
(distributiva)

Donde c_1, c_2 son escalares

El vector unidad $[1,1]$, neutro bajo
la multiplicación

El vector cero $[0,0]$, multiplicación
por cero

Inspeccionar: <http://demonstrations.wolfram.com/3DVectorDecomposition/>

1.5 El vector en \mathbb{R}^3

La norma, módulo o magnitud de un vector en \mathbb{R}^3 , es dada por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

En el espacio \mathbb{R}^3 , es común trabajar los vectores en términos de **vectores unitarios**, son vectores de magnitud 1, dirección sobre los ejes x, y, z respectivamente, se les llama $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Estos vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ unitarios se les llama base de un sistema tridimensional. Además, de cualquier vector podemos obtener su vector unitario, de la siguiente manera:

$$|\hat{v}| = \left| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} |\vec{v}| = 1$$

Ejemplo, para el vector $\vec{v} = [3, 5]$ genere un vector unitario en la dirección de \vec{v} y otro en la opuesta.

Solución. La norma de

$$|\vec{v}| = \sqrt{34}$$



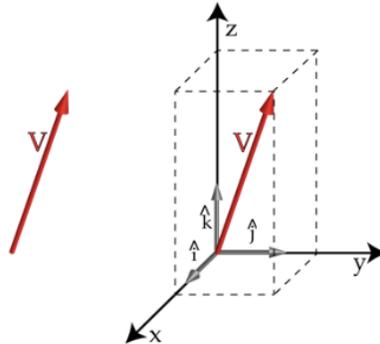
Entonces el vector unitario en la misma dirección es

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{34}} \vec{v} = \left[\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}} \right]$$

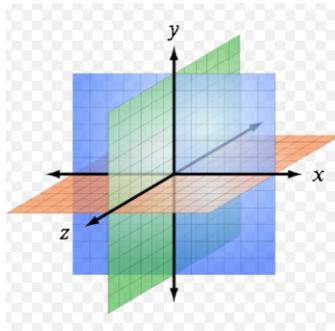
El vector unitario en la dirección contraria es

$$-\hat{v} = \left[-\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}} \right]$$

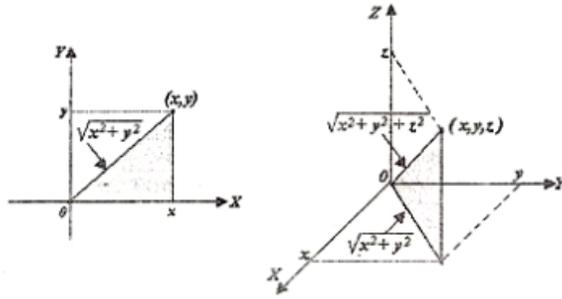
Los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, son los vectores que sobre los ejes de coordenadas se forman con una esfera de radio uno. Es una forma alternativa para trabajar los componentes de un vector.



La representación de vectores en \mathbb{R}^3 , es escribir un vector asociado a sus coordenadas relativas a los tres ejes mutuamente ortogonales y al origen dado por el vector cero. Formándose los planos xz , yz , xy . Con estos planos coordenados podemos referir cualquier vector en \mathbb{R}^3 , dependiendo del octante en el que actúa (8 partes conocidas en \mathbb{R}^3). Por ejemplo, el octante donde las tres componentes de un vector son positivas se llama primer octante.



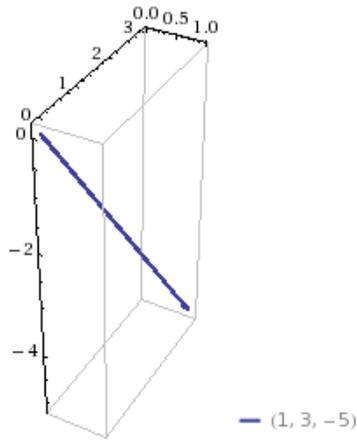
Las coordenadas de un punto en \mathbb{R}^3 , coinciden con las componentes de un vector posición en \mathbb{R}^3



Dado un vector en términos de vectores unitarios:

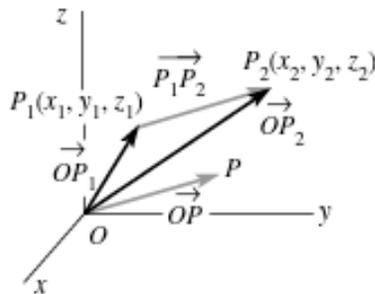
$$\hat{v} = i + 3j - 5k = [1, 3, -5]$$

Vector plot:



Las propiedades de los vectores en \mathbb{R}^3 , son las mismas que para \mathbb{R}^2 .

Ejemplo. Calcule la distancia entre los vectores de posición y el ángulo entre ellos:



$$\vec{OP}_1 = [1, 2, 4]$$

$$\vec{OP}_2 = [-1, 5, 7]$$

Solución. Calculemos el vector que une las dos cabezas de vector

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = [-2, 3, 3]$$

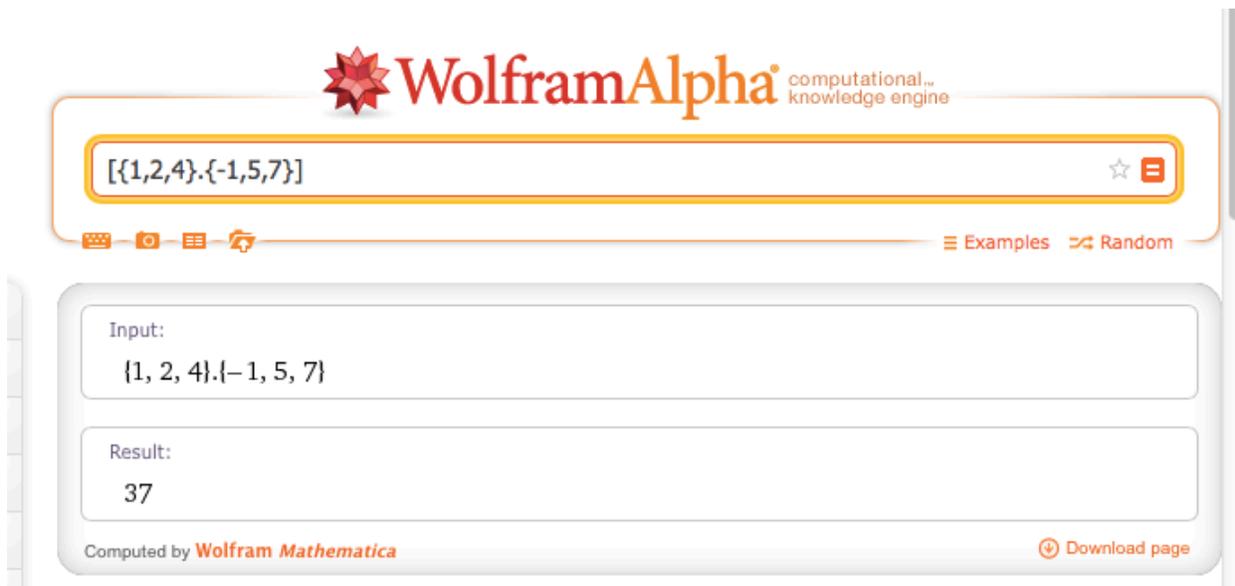
Este vector $[-2, 3, 3]$ se puede dibujar saliendo del origen o desde el punto. La distancia entre las dos cabezas de vector corresponde a

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (3)^2} = \sqrt{22}$$

Ángulo entre los dos vectores de posición en el espacio, usaremos el producto punto

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

entonces:



The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, the WolframAlpha logo is displayed with the tagline "computational knowledge engine". Below the logo is a search input field containing the expression $[1, 2, 4].[-1, 5, 7]$. To the right of the input field are icons for a star and a menu. Below the input field are icons for keyboard, camera, list, and refresh. To the right of these icons are links for "Examples" and "Random". Below the input field is a section labeled "Input:" containing the text $\{1, 2, 4\} \cdot \{-1, 5, 7\}$. Below that is a section labeled "Result:" containing the number 37. At the bottom of the interface, it says "Computed by Wolfram Mathematica" and there is a "Download page" link.

norm [{1,2,4}]



Examples Random

Input:

$\|(1\ 2\ 4)\|$

$\|\text{expr}\|$ gives the norm of a number, vector, or matrix »

Result:

$\sqrt{21} \approx 4.58258$

More digits »

norm {-1, 5,7}



Examples Random

Input:

$\|{-1, 5, 7}\|$

$\|\text{expr}\|$ gives the norm of a number, vector, or matrix »

Result:

$5\sqrt{3} \approx 8.66025$

More digits »

Computed by **Wolfram Mathematica**

Download page

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{37}{\sqrt{21}\sqrt{75}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{37}{15\sqrt{7}}\right) = 0.370041 \text{ radians}$$

$$\theta = 21.2018^\circ$$

vector{1,2,4}, vector{-1,5,7}

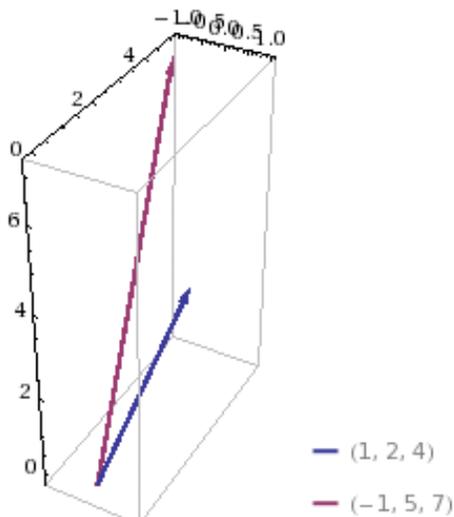


Examples Random

Input interpretation:

{(1, 2, 4), (-1, 5, 7)}

Vector plot:



Enable interactivity

1.6 Producto cruz de vectores

El producto cruz de dos vectores en \mathbb{R}^3 , es dado por Gibbs, como un vector perpendicular al plano formado por los vectores dentro de un producto vectorial.

$$\vec{v} \times \vec{u} = (|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \sin \theta) \hat{n}$$

Donde \hat{n} , es un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores multiplicados. Usando la notación $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y empleando determinantes:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \det(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$\det(\vec{v} \times \vec{u}) = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ u_y & u_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ u_x & u_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\det(\vec{v} \times \vec{u}) = [(v_y \cdot u_z) - (u_y \cdot v_z)]\hat{i} - [(v_x \cdot u_z) - (u_x \cdot v_z)]\hat{j} + [(v_x \cdot u_y) - (u_x \cdot v_y)]\hat{k} =$$

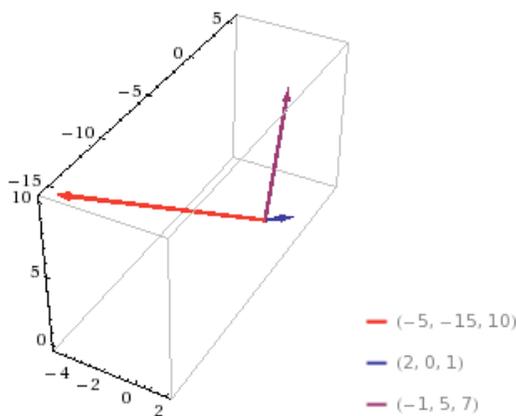
Ejemplo: Determine el producto vectorial entre

$$\vec{v} = [2, 0, 1] = 2\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{u} = [2, -1, 3] = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$



Vector plot:



Verifique usted

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

Propiedades de producto cruz

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$	No es conmutativo
$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{c}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{c}$	Distributivo
$c(\vec{v} + \vec{c}) = (c\vec{v} + \vec{c}) = (\vec{v} + c\vec{c})$	Donde c es un escalar
$\vec{v} \times \vec{u} = 0$	El producto cruz de dos vectores es cero si son vectores paralelos

1.7 Magnitud tensorial

Es la relación de fusión de los elementos algebraicos escalar, vectorial y matricial. Tensor se refiere a un campo tensorial. El tensor es un concepto que agrupa los ya mencionados objetos escalar, vectorial y matricial, con propia notación y que provocó una nueva manera de pensar las leyes físicas dentro del electromagnetismo, mecánica de fluidos, teoría de la elasticidad, geometría diferencial y el álgebra lineal. Es un concepto que hace especial atención entre magnitudes físicas o geométricas. El espacio vectorial es la estructura matemática para el desarrollo del álgebra tensorial. La Física moderna descansa sobre este importante concepto de tensor, por limitaciones en el alcance de este curso, no profundizaremos más sobre este fascinante mundo tensorial.

1.8 Sistemas de coordenadas

En un sistema de coordenadas un punto se representa como la intersección de tres superficies ortogonales llamadas superficies coordenadas del sistema. Las líneas de intersección de las superficies coordenadas se llaman curvas coordenadas y son ortogonales entre sí.

$$u_1 = cte$$

$$u_2 = cte$$

$$u_3 = cte$$

Los vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas son mutuamente ortogonales y coinciden con los vectores unitarios perpendiculares a las superficies coordenadas. Estos vectores forman una base que permite representar cualquier vector en función de sus componentes en el sistema de coordenadas:

$$\vec{r} = a_1 \hat{a}_1 + a_2 \hat{a}_2 + a_3 \hat{a}_3$$

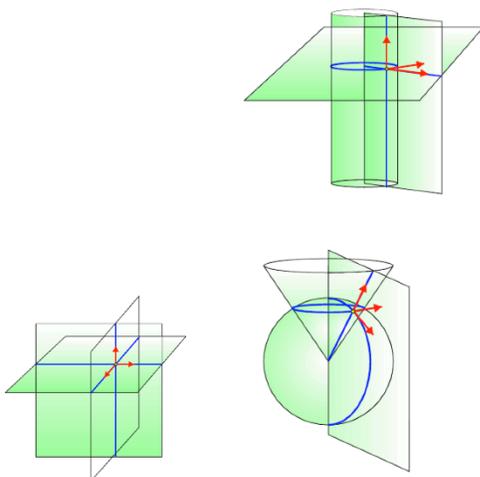
En general, las coordenadas no representan distancias en las direcciones de los ejes del sistema:

$$dl_1 \neq da_1$$

$$dl_2 \neq da_2$$

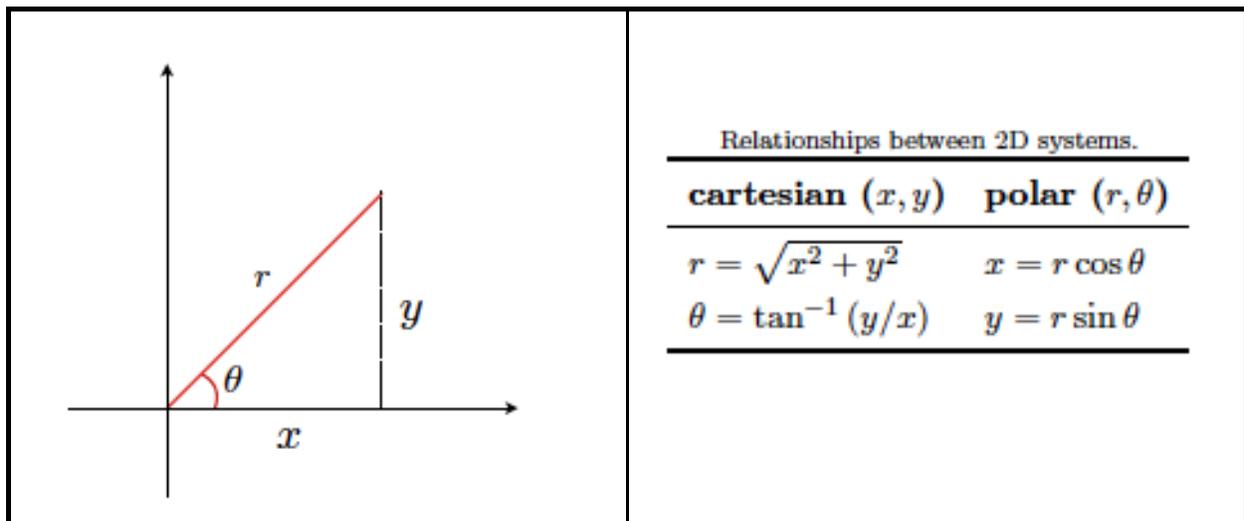
$$dl_3 \neq da_3$$

Los sistemas más frecuentemente utilizados son el cartesiano o rectangular, el cilíndrico y el esférico.



1.8.1 Sistemas 2D

Un sistema en una dimensión es expresado por la recta numérica de los números reales y es estudiado en la educación primaria como una forma lineal de escala de referencia respecto al origen en el valor cero. En el caso de dos dimensiones, comúnmente se emplean dos tipos de sistemas de coordenadas: cartesiano (x-y) y el polar $(r-\theta)$. Un punto de interés específico en un sistema puede ser fácilmente expresada en el otro sistema a través de la trigonometría básica, como se muestra a continuación:



Por ejemplo, podemos describir el punto **P** equivalente en ambos sistemas de coordenadas:

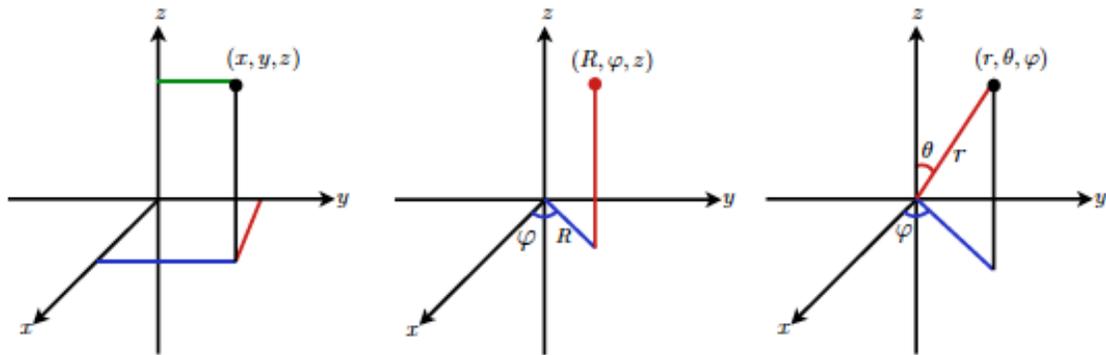
$$P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Tenga en cuenta que implícitamente se ha elegido un sistema de mano derecha de coordenadas, donde con **x** fluye hacia la derecha, punto **y** hacia arriba. Esto está en contraste con un sistema de la mano izquierda, en la que **y** se correría hacia abajo si **x** fluye a la derecha. Sistemas zurdos y diestros no se pueden intercambiar por una rotación pura (convéznase de esto). Pero requieren una inversión en conjunto con la rotación o un plano de simetría o espejo. Nosotros siempre elegiremos un sistema diestro.

Inspeccionar: <http://demonstrations.wolfram.com/2DCoordinateSystemTransformations/>

1.8.2 Sistemas 3D

En tres dimensiones, hay tres sistemas comunes de coordenadas que utilizaremos: los sistemas cartesiano (x,y,z) , cilíndrico (R,φ,z) y esférico (r,φ,θ) . Tenga en cuenta que el sistema cartesiano es todavía un diestro - si sus dedos apuntan a lo largo del eje x , y el pulgar a lo largo del eje y , el eje z señala el dorso de la mano para un sistema de mano derecha-. Tenga en cuenta que algunos autores utilizan diferentes convenciones para especificar ángulos y distancias, sobre todo en los sistemas cilíndrico y esférico.



Sistemas de coordenadas en 3D: Izquierdo cartesiano (x,y,z) ; Centrado: cilíndrico (R,φ,z) ; diestro o derecho esférico (r,φ,θ) .

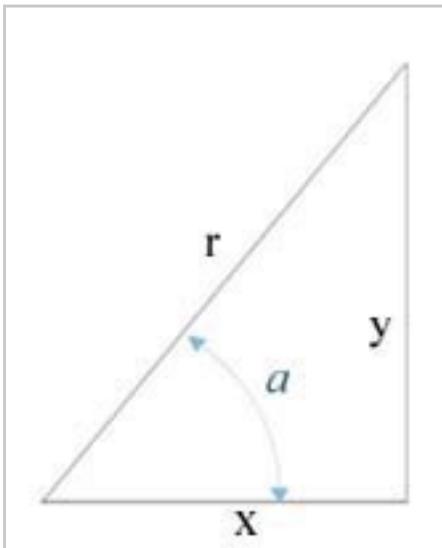
Las interrelaciones entre estos tres sistemas de coordenadas también se derivan de la geometría básica, siempre y cuando uno se ocupe en las definiciones de los ángulos φ y de θ . . . A continuación se lista el rango de las variables angulares dentro de las convenciones que vamos a adoptar, así como la interrelación entre los diferentes sistemas de coordenadas.

Sistema	variable	rango	Plano relevante
Cilíndrico	φ	$0 - 2\pi$	xy
Esférico	φ	$0 - 2\pi$	xy
Esférico	θ	$0 - \pi$	Inclinado sobre el eje z

Rango de variables angulares en sistemas de coordenadas en 3D

1.8.3 Sistemas de coordenadas de rotación en 2D

Primero un poco de trigonometría básica



donde tenemos las siguientes relaciones:

$$x = r \cos a$$

$$y = r \sin a$$

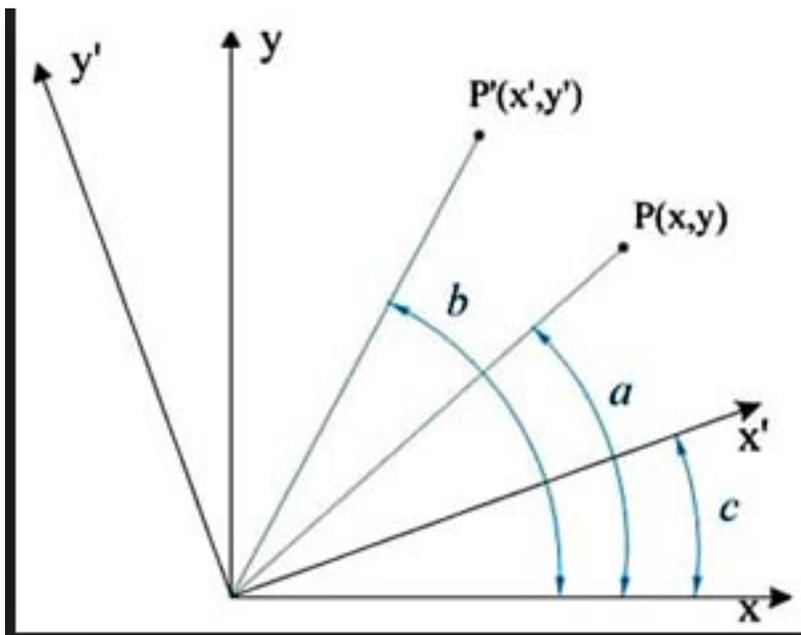
(hipotenusa)

algunas relaciones trigonométricas útiles:

Sen (a-b)=	sen a cos b - cos a sen b
Sen (a+b)=	sen a cos b + cos a sen b
Cos (a-b)=	cos a cos b + sin a sen b

$\cos(a+b) =$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
---------------	---------------------------------

En dos dimensiones. Tome un sistema normal (x, y) , y seleccione un punto $P(x, y)$. Un giro a la izquierda sobre el origen por el camino (rotando x hacia y en un sistema de rotación con la mano derecha) significa que el punto $P(x, y)$ se describe por las coordenadas $P'(x', y')$ en el marco rotado, como se muestra a continuación.



Rotación sobre un sistema de coordenadas 2D

Ver video tutor: <https://www.youtube.com/watch?v=Da5cz-RN0Yw>

Utilizando la trigonometría básica, podemos encontrar fácilmente una relación entre las dos representaciones de coordenadas:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta - y' \cos \theta$$

O podemos escribir esto en forma de matriz de ecuaciones.

$$P'_\theta = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} P \equiv R(\theta)P$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \equiv R'(\theta)P'_\theta$$

Aquí, la matriz $R(\theta)$ actúa sobre el vector columna P , se conoce como una **matriz de rotación**, con bastante sensatez. Matrices de rotación deben tener un factor determinante de ± 1 en orden que preserve la longitud. Por otro lado, si hacemos una rotación en sentido horario sobre el origen θ (rotación y hacia x en un sistema de mano derecha), las nuevas coordenadas después de la rotación son:

$$x' = x \cos\theta + y \text{sen}\theta$$

$$y' = -x \text{sen}\theta + y \cos\theta$$

En términos de la matriz de rotación,

$$P'_\theta = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} P \equiv R(-\theta)P$$

Tenga en cuenta que como se esperaba x y y son los sustitutos para y y x y viceversa. A continuación se presentan algunos ejemplos adicionales de rotaciones específicas en dos dimensiones:

$R(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Hacia la izquierda a 90°
$R(180^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$	180° , $I =$ matriz identidad
$R(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -R(90^\circ) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Hacia la derecha a 90°

Otro punto a destacar es que para una rotación alrededor de un origen fijo, las distancias del origen deben ser preservadas, el radio invariante. Esto requiere, en dos dimensiones:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

que se pueda verificar que es verdad para las relaciones anteriores. Esto es equivalente a requerir que las matrices de rotación tienen un determinante de ± 1 ($\det R = \pm 1$), donde $+$ y $-$ se corresponde con rotaciones apropiadas e inapropiadas, respectivamente (véase más

adelante). Esto también hace la matriz rotación sea afectada por transformaciones ortogonales.

Inspeccionar:

<http://demonstrations.wolfram.com/2DRotationUsingMatrices/>

<http://demonstrations.wolfram.com/CoordinateTransformationOfAMatrixAndAlphaMatrix/>

<http://demonstrations.wolfram.com/RotationAboutAPointInThePlane/>

1.8.4 Sistemas de coordenadas de rotación 3D

En tres dimensiones, tenemos tres tipos de rotaciones alrededor de un origen fijo a considerar: la rotación de las x , y , z hechas en sentido antihorario mientras observa el origen. Las tres matrices de rotación básicas (por un sistema de mano derecha de coordenadas) son:

$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	Rota eje y hacia eje z
$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$	Rota eje z hacia eje x
$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Rota eje x hacia eje y

Cualquier rotación se puede administrar como una composición de rotaciones alrededor de estos tres ejes, y por lo tanto, puede ser representado por una matriz de 3×3 que opera en un vector de columna que describe la posición.

1.9 Transformaciones de coordenadas

1.9.1 Sistema de coordenadas rectangular

Las superficies coordenadas son tres planos ortogonales entre sí:

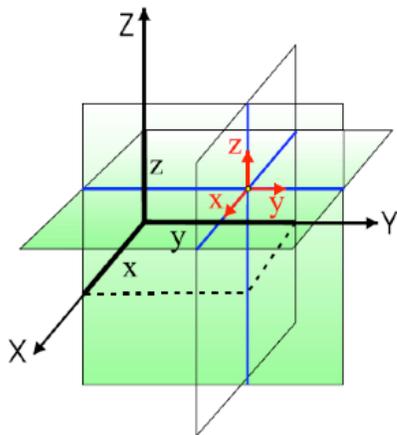
$$x = cte$$

$$y = cte$$

$$z = cte$$

Un punto queda determinado por la intersección de estos tres planos y sus coordenadas vienen dadas por las tres constantes de los planos (x,y,z) . Las líneas coordenadas son rectas perpendiculares entre sí y los vectores unitarios llevan sus direcciones, se denominan $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, por lo que un vector se escribirá:

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$



Como caso particular de este sistema de coordenadas, estos tres vectores se mantienen constantes en todos los puntos del espacio. También ocurre que las coordenadas son métricas, por lo que los factores de escala son la unidad y, en las direcciones de los ejes coordenados

$$dl_1 = dx$$

$$dl_2 = dy,$$

$$dl_3 = dz$$

los diferenciales de longitud son los diferenciales de superficie en cada una de las superficies coordenadas.

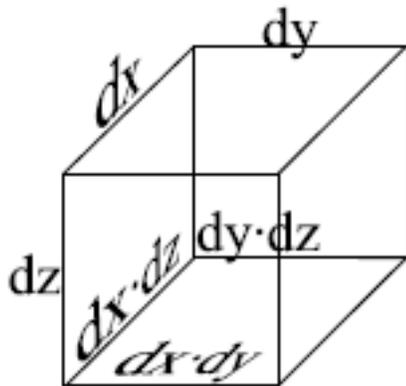
$$dS_1 = dl_2 dl_3 = dy dz$$

$$dS_2 = dl_1 dl_3 = dx dz,$$

$$dS_3 = dl_1 dl_2 = dx dy$$

y el diferencial de volumen:

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = dx dy dz .$$



1.9.2 Sistema de coordenadas cilíndrico

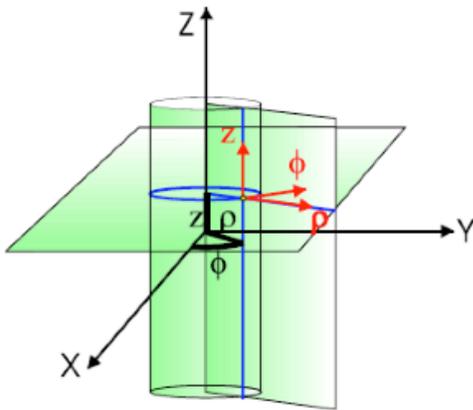
Las superficies coordenadas son, planos $Z = \text{cte}$, semiplanos que contienen al eje z y forman un ángulo φ con el semiplano $X-Z$, y cilindros de eje z y radio ρ .

$$\rho = cte$$

$$\phi = cte$$

$$z = cte$$

Las coordenadas de un punto vienen dadas por la intersección de tres de estas superficies, y se especifican mediante la terna (ρ, ϕ, z) . Las líneas coordenadas ya no son todas rectas, y los vectores unitarios se denominan $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$. La dirección de los vectores $\hat{\rho}, \hat{\phi}$, varía según el punto del espacio considerado.

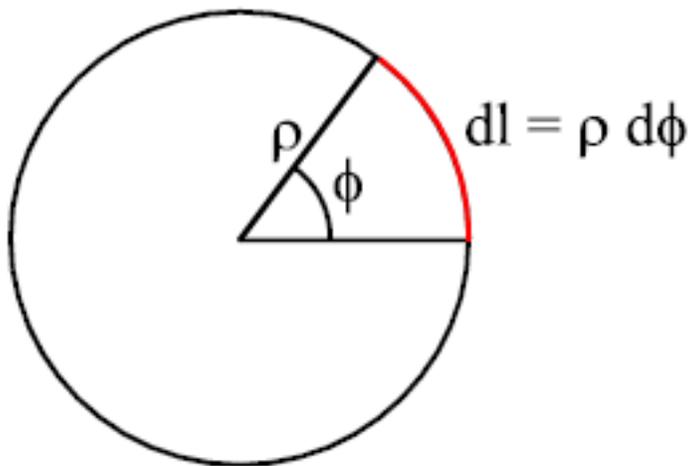


Las coordenadas ρ y z son métricas, por lo que el factor de escala es la unidad. Sin embargo la coordenada ϕ es angular, siendo el factor de escala ρ , de modo que un diferencial de arco en la coordenada ϕ mide $d\phi = \rho d\phi$:

$$dl_1 = d\rho$$

$$dl_2 = \rho d\phi$$

$$dl_3 = dz$$

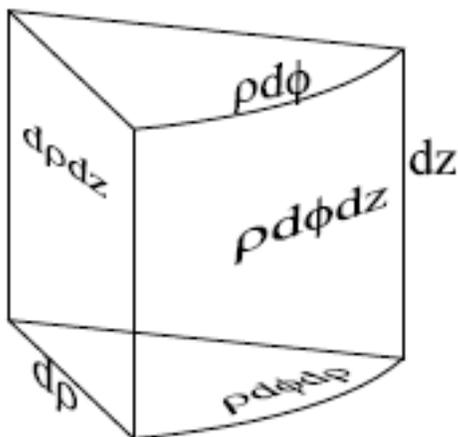


Los diferenciales de superficie, sobre las superficies coordenadas serán:

$$dS_1 = \rho d\phi dz$$

$$dS_2 = d\rho dz$$

$$dS_3 = \rho d\phi d\rho$$



Por último, el diferencial de volumen es:

$$dV = \rho d\phi d\rho dz.$$

1.9.3 Sistema de coordenadas esférico

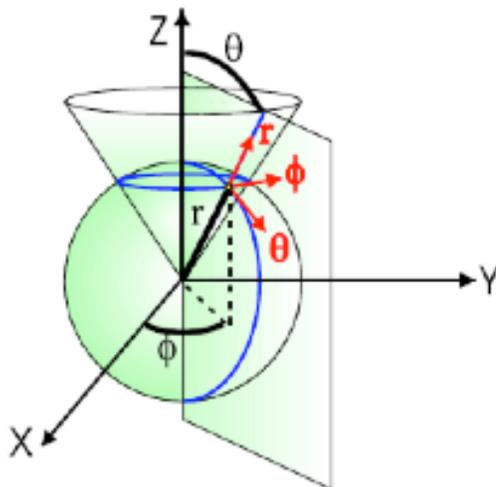
Las superficies coordenadas en el sistema de coordenadas esféricas son, una esfera de radio r , un cono de eje Z y centro el origen de coordenadas, cuya superficie forma un ángulo θ con el eje Z, y un semiplano que contiene al eje Z y forma un ángulo ϕ con el semiplano XZ.

$$r = cte$$

$$\phi = cte$$

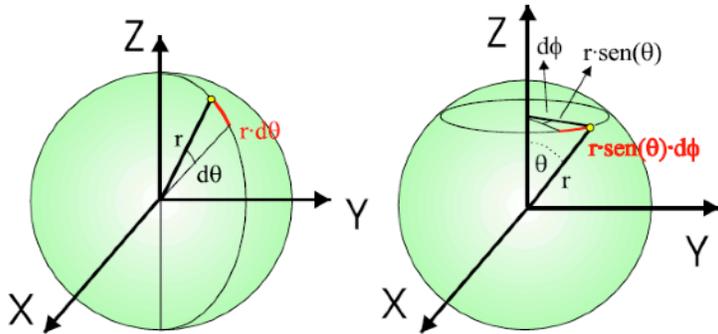
$$\theta = cte$$

Las coordenadas de un punto vienen dadas por la terna (r, ϕ, θ) , y los vectores unitarios $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$. Todos los vectores varían su dirección según el punto del espacio considerado.



Únicamente la coordenada r es métrica y le corresponde a un factor de escala 1. Para las coordenadas ϕ y θ los factores de escala son, respectivamente $r \sin(\theta)$ y r :

$$\begin{aligned}
 dl_1 &= dr \\
 dl_2 &= r \operatorname{sen}(\theta) d\phi \\
 dl_3 &= r d\theta
 \end{aligned}$$

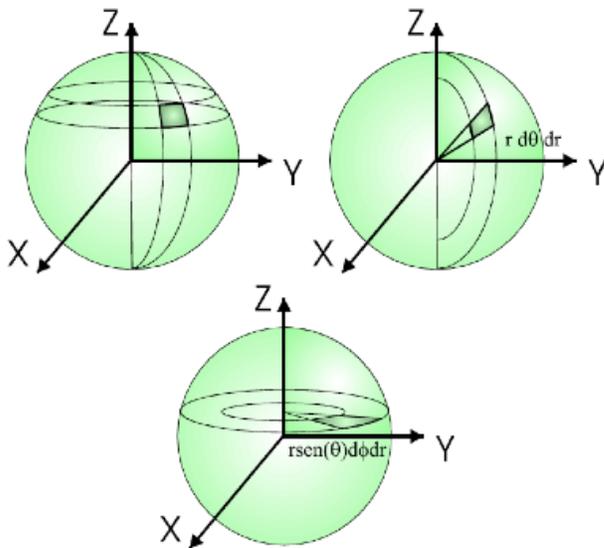


Por lo que respecta a los diferenciales de superficie las expresiones son:

$$dS_1 = r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\phi d\theta$$

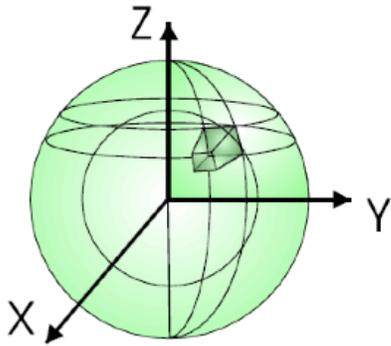
$$dS_2 = r d\theta dr$$

$$dS_3 = r \operatorname{sen}(\theta) d\phi dr$$

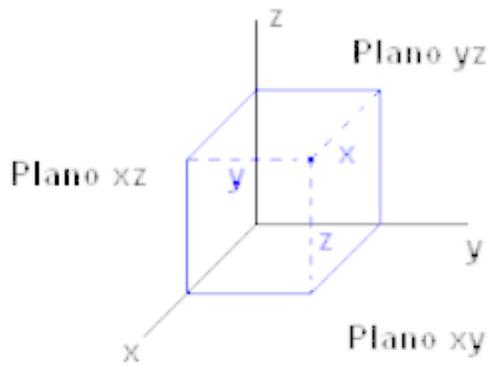


Por último un diferencial de volumen vendrá dado por:

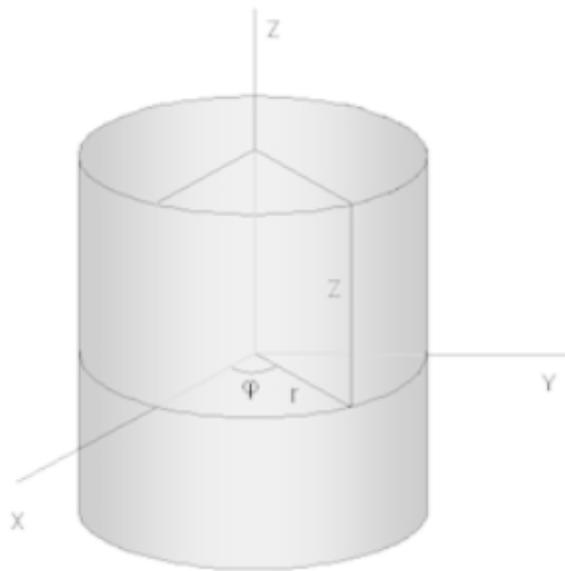
$$dV = r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr$$



1.9.4 Matrices de transformación de coordenadas



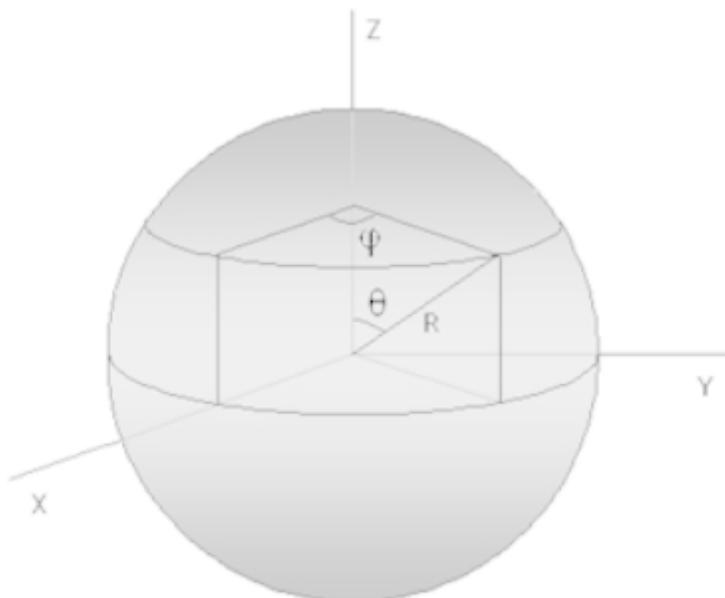
Sistema de coordenadas cartesianas.



Sistema de Coordenadas cilíndricas

<http://demonstrations.wolfram.com/CylindricalCoordinates/>

<http://demonstrations.wolfram.com/ExploringCylindricalCoordinates/>



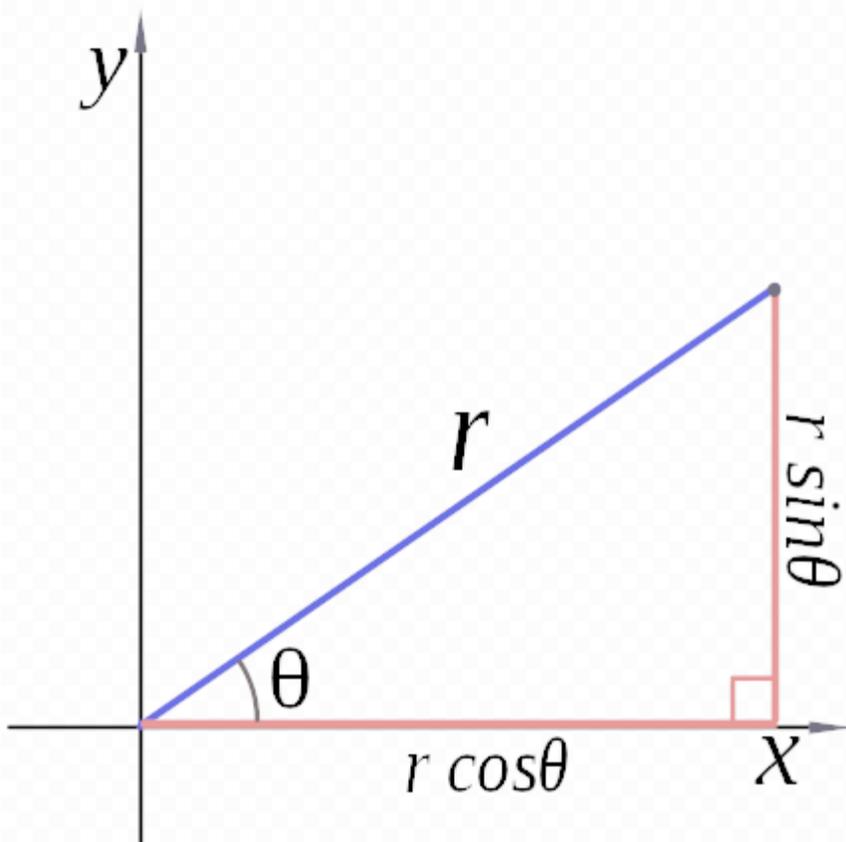
Sistema de coordenadas esféricas.

<http://demonstrations.wolfram.com/SphericalCoordinates/>

<http://demonstrations.wolfram.com/ExploringSphericalCoordinates/>

<http://demonstrations.wolfram.com/SphericalCoordinateSystemWithUnitVectors/>

Coordenadas polares



<http://demonstrations.wolfram.com/PolarCoordinates/>

Transformar coordenadas cartesianas a cilíndricas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z$$

Transformar coordenadas cilíndricas a cartesianas

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

Esta es una lista de algunas fórmulas de **cálculo vectorial** de empleo corriente trabajando con varios sistemas de coordenadas.

Operación	coordenadas cartesianas (x,y,z)	coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z)	coordenadas esféricas (r,θ,φ)
Definición de las coordenadas		$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \cos \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$
		$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{cases}$
A	$A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$	$A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$	$A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \end{pmatrix} \hat{y} + \begin{pmatrix} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{pmatrix} \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \hat{\rho} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \hat{r} + \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \hat{\theta} + \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} \hat{\phi}$
$\Delta f = \nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$	$\hat{x} \Delta A_x + \hat{y} \Delta A_y + \hat{z} \Delta A_z$	$\hat{\rho} \left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) + \hat{z} \Delta A_z$	$\hat{r} \left(\Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta \cos \theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \hat{\theta} \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right)$

Reglas de cálculo no triviales:

1. $\text{div grad } f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$ (laplaciano)
2. $\text{rot grad } f = \nabla \times (\nabla f) = 0$
3. $\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
4. $\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
5. $\Delta f g = f \Delta g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + g \Delta f$
6. **Fórmula de Lagrange** para el **producto vectorial**:
 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Conversión de coordenadas polares a rectangulares

Definido un punto en coordenadas polares por su ángulo θ sobre el eje x , y su distancia r al centro de coordenadas, se tiene:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Conversión de coordenadas rectangulares a polares

Definido un punto del plano por sus coordenadas rectangulares (x,y) , se tiene que la coordenada polar r es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{aplicando el Teorema de Pitágoras})$$

Para determinar la coordenada angular θ , se deben distinguir dos casos:

Para $r = 0$, el ángulo θ puede tomar cualquier [valor real](#).

Para $r \neq 0$, para obtener un único valor de θ , debe limitarse a un intervalo de tamaño 2π . Por convención, los intervalos utilizados son $[0, 2\pi)$ y $(-\pi, \pi]$.

Para obtener θ en el intervalo $[0, 2\pi)$, se deben usar las siguientes fórmulas (arctan denota la inversa de la función [tangente](#)):

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

Para obtener θ en el intervalo $(-\pi, \pi]$, se deben usar las siguientes fórmulas:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

<http://demonstrations.wolfram.com/ConstantCoordinateCurvesForParabolicAndPolarCoordinates/>

<http://demonstrations.wolfram.com/PolarAreaSweep/>

<http://demonstrations.wolfram.com/SixSphereCoordinates/>

Normalización de vectores

<http://demonstrations.wolfram.com/3DVectorDecomposition/>

<http://demonstrations.wolfram.com/EllipticCylindricalCoordinates/>

<http://demonstrations.wolfram.com/ParabolicCylindricalCoordinates/>

1.10 Operador DEL o Nabla

Desde geometría diferencial, Nabla es un operador diferencial vectorial con símbolo ∇ y en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

o

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

en coordenadas cilíndricas

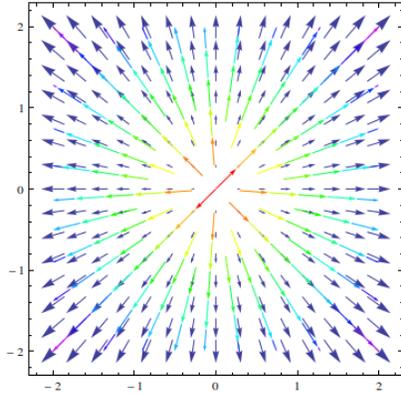
$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

en coordenadas esféricas

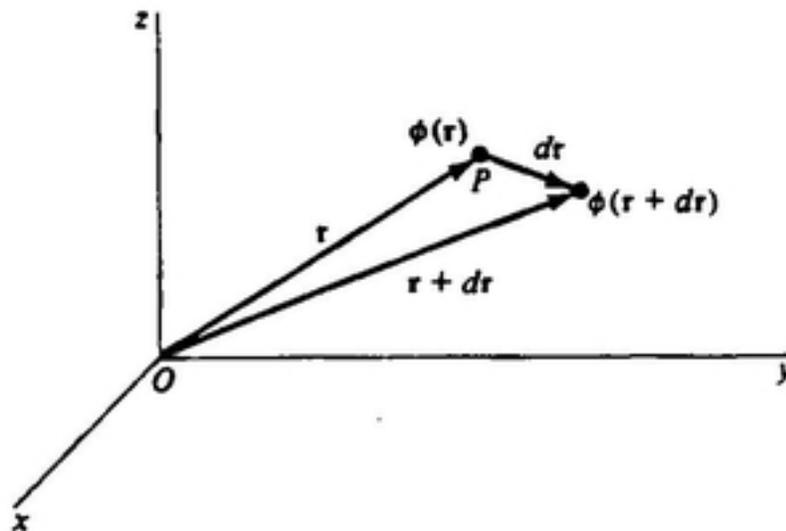
$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

1.11 Gradiente y derivada direccional

El gradiente es la derivada vectorial, un campo de vectores dirección sobre las rectas tangentes a la curva $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Expresa dirección y velocidad de propagación.



Supongamos que una cantidad escalar ϕ , tal como la humedad relativa del aire, se da como una función de cada punto para las regiones de un espacio $\phi(r) = \phi(x, y, z)$. En un punto \mathbf{P} , esta función tiene el valor $\phi(x, y, z)$; en otro punto $\mathbf{P} + d\mathbf{P}$, removiendo \mathbf{P} por el diferencial de distancia $d\mathbf{r}$, el valor de la función está dado por:



$$r = [x, y, z]$$

$$\phi(x, y, z) = P$$

$$P + dP = \phi(x, y, z) + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz \right] + \dots$$

$$\phi(x+dx, y+dy, z+dz) = \phi(x, y, z) + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_p dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_p dz \right] + \dots$$

Descartaremos los diferenciales de orden superior en el incremento de la función escalar entre los dos puntos \mathbf{P} y $\mathbf{P} + d\mathbf{P}$; se obtiene:

$$d\phi = \phi(x+dx, y+dy, z+dz) - \phi(x, y, z)$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz$$

factorizar

$$d\phi = \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \hat{z} \right) \cdot (\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz)$$

Aquí \hat{x} es un vector unitario en la dirección del vector \mathbf{x} , es decir, $1 = \hat{x} \cdot \hat{x}$; similar para \hat{y} y para \hat{z} . El segundo paréntesis a la derecha en la última ecuación se trata de $d\mathbf{r}$. El índice de soporte \mathbf{P} , está implícito en las derivadas. Si el primer paréntesis se describe como $\nabla\phi$ (nabla phi o DEL phi), esta ecuación se transforma en:

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

$\nabla\phi$, es definido por la ecuación, es llamado gradiente de ϕ y es aplicado en varios sistemas de coordenadas, además del cartesiano. A veces está escrito como grad o en notación simbólica $\nabla\phi$, que representa incremento de ϕ , entre dos puntos separados por una distancia finita. Por tanto el valor del gradiente de phi es una derivada vectorial en coordenadas cartesianas:

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}$$

en vectores unitarios

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

En cualquier sistema $\nabla\phi$ es una función vectorial obtenida por el producto de operador Nabla por una función escalar. Considere que Nabla no es una función, sino un operador vectorial, por sí mismo no tiene significado.

La magnitud de cambio $d\phi = \nabla\phi \cdot dr = |\nabla\phi| dr \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\nabla\phi$ y dr . Cuando dr es un vector que se encuentra a lo largo de la dirección de $\nabla\phi$, el cambio resultante en ϕ tendrá su máximo valor en $|\nabla\phi| dr$. $\nabla\phi$ por lo tanto, actúa como vector que apunta en la dirección de la máxima tasa de cambio de ϕ ; y el sentido del vector de la función vectorial $\nabla\phi$ es tal que apunta a la dirección ϕ creciente. La magnitud de este vectorial es

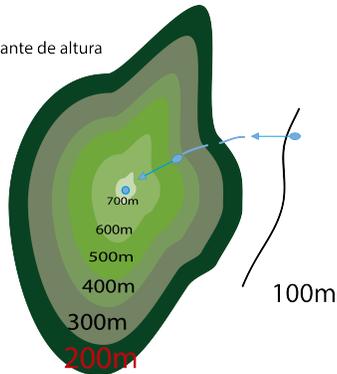
$$|\nabla\phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}$$

El vector $-\nabla\phi$ tiene la misma magnitud que $\nabla\phi$, solo que apunta en la dirección opuesta a la máxima tasa de incremento o propagación. Como ejemplo de un gradiente, nosotros podemos considerar una porción de una colina con altura sobre el nivel del mar h , en cualquier punto de la colina, es una función de posición $h=h(x,y)$. Una versión simplificada del gradiente.

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{y}$$

De la magnitud y dirección de la máxima tasa de cambio de altura en un momento dado, como lo ilustra la figura siguiente:

Contorno de la constante de altura



Este es un mapa topográfico bidimensional que utiliza la altura como parámetro. La magnitud de ∇h , aquí es

$$|\nabla h| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$$

La tasa de cambio de la altura con respecto a un desplazamiento horizontal. La dirección de ∇h es dada en la tasa de cambio de la máxima altura, a mayor altitud para un desplazamiento horizontal $\mathbf{dr} = \mathbf{dx} + \mathbf{dy}$ cuya dirección no es a lo largo de la dirección de ∇h (aquí ∇h está en el plano $\mathbf{x-y}$) el cambio de la altura será $dh = |\nabla h| dr \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre el ∇h y el \mathbf{dr} .

La derivada direccional de la altura, es una determinada dirección que se define como

$$\frac{dh}{dr}$$

y es igual a $|\nabla h| \cos \theta$. Esto es inferior a la máxima tasa de cambio de altura, obtenida por el mismo \mathbf{dr} , cuando \mathbf{dr} está a lo largo de la dirección de ∇h . Para $\theta = 180^\circ$ la altura disminuye a una tasa máxima, el desplazamiento horizontal siendo opuesto en dirección a la del gradiente. La altura h en este análogo bidimensional del gradiente se distingue por no tener la dimensión \mathbf{z} , del gradiente ordinario en 3D. La derivada direccional de una función es así la tasa de cambio de esa función en una dirección determinada. Si la derivada direccional es positiva en una dirección concreta, entonces la función está

aumentando en esa dirección. El gradiente de una función en un punto es la derivada direccional en ese sentido para la tasa de cambio máxima.

Una función escalar cuya pendiente es cero en un punto es una función que tiene un máximo, mínimo o una inflexión allí. Si el gradiente es cero en todas partes, entonces la función escalar es una constante. Cuando el valor de esta constante es arbitrario es a menudo conveniente ponerlo igual a cero. Por ejemplo, podemos tomar $\nabla h = 0$ sobre la superficie del océano. Entonces el nivel del mar puede tomarse como la medida de altura cero.

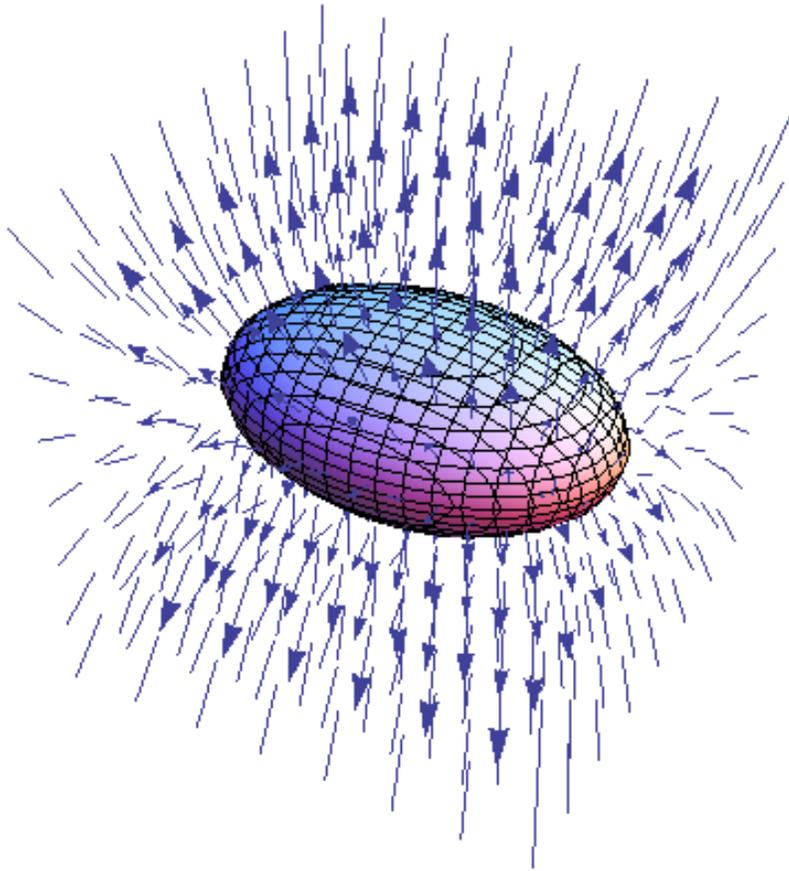
Ejemplos 1:

Calcúlese el gradiente de la función escalar F

$$F(x, y, z) = 3xy + \frac{2yz}{x} - z^5 y^{-3}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \nabla F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \left(3xy + \frac{2yz}{x} - z^5 y^{-3} \right) \\ \nabla F &= \frac{\partial \left(3xy + \frac{2yz}{x} - z^5 y^{-3} \right)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \left(3xy + \frac{2yz}{x} - z^5 y^{-3} \right)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \left(3xy + \frac{2yz}{x} - z^5 y^{-3} \right)}{\partial z} \hat{k} \\ \nabla F &= y \left(3 - \frac{2z}{x} \right) \hat{i} + \left(\frac{2z}{x} + 3x + \frac{3z^5}{y^4} \right) \hat{j} + \left(\frac{2y}{x} - \frac{5z^4}{y^3} \right) \hat{k} \\ \vec{F} &= \left[y \left(3 - \frac{2z}{x} \right), \frac{2z}{x} + 3x + \frac{3z^5}{y^4}, \frac{2y}{x} - \frac{5z^4}{y^3} \right] \end{aligned}$$



 **WolframAlpha** computational knowledge engine

☆ 

 ≡ Examples ↔ Random

En Mathematica 10:

<http://reference.wolfram.com/language/tutorial/VectorAnalysis.html>

Software libre WinPlot para gráficar ecuaciones diferenciales

<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>

Demostración

<http://demonstrations.wolfram.com/VisualizingTheGradientVector/>

<http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Multivariable+Calculus&limit=20>

<http://mathematica.stackexchange.com/questions/48383/plot-a-function-based-on-derivative-gradient-field>

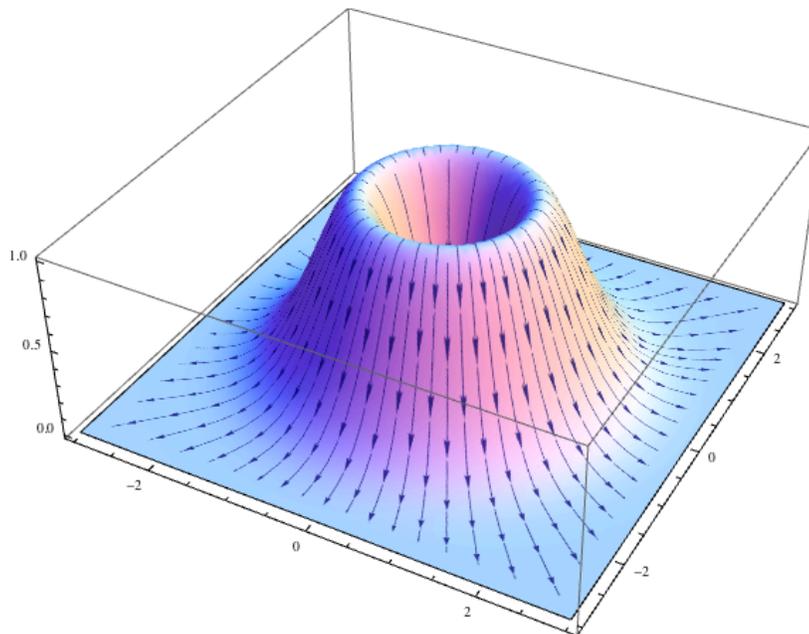
Gráficos y visualización

Muestre el campo de gradiente en una superficie

Muestre el campo de gradiente negativo para una superficie.

```
In[1]:= Plot3D[(x^2 + y^2) Exp[1 - x^2 - y^2], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},  
PlotStyle ->  
Texture[  
StreamPlot[Evaluate[-D[(x^2 + y^2) Exp[1 - x^2 - y^2], {{x, y}}]],  
{x, -3, 3}, {y, -3, 3}, Frame -> None, ImageSize -> Large]],  
Mesh -> None, ImageSize -> Large, PlotPoints -> 35]
```

Out[1]=



1.12 Divergente

Flujo. Una superficie cerrada es una superficie límite que divide un volumen en dos partes: un interior y un exterior. La superficie del mismo es limitada por una curva de superficie. Un área elemental de la superficie cerrada está representada por un diferencial vectorial de superficie $d\mathbf{S}$ que apunta al exterior, cuya área real de magnitud $|d\mathbf{S}|$ es ortogonal al vector $d\mathbf{S}$ que representa. La superficie de una pseudo-esfera es una superficie cerrada, en ella en todos los puntos $d\mathbf{S}$ son radialmente hacia fuera, de las dos direcciones

posibles para $d\mathbf{S}$, la convención universal es tomar la dirección que va de adentro hacia fuera como positiva.



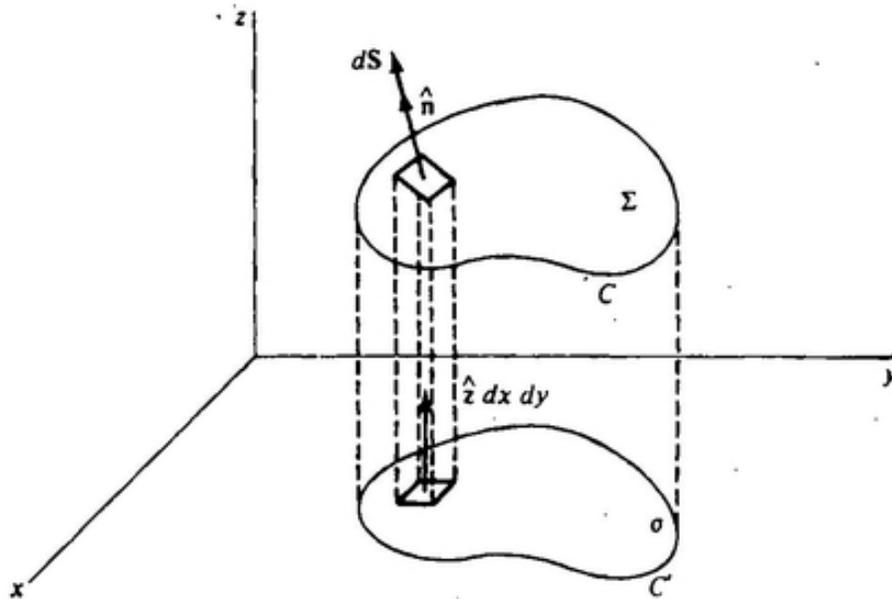
Una superficie abierta que está delimitada por una curva. La página de un libro es una superficie abierta y el borde de la página es la curva límite. Para una superficie $d\mathbf{S}$ abierta su magnitud es $|dS|$ y $d\mathbf{S}$ es el vector perpendicular a la zona real representada. Aquí, además hay dos posibilidades para la dirección de $d\mathbf{S}$, negativa y positiva; es decir, la positiva atravesó el perímetro de la lámina, negativa si las líneas de flujo ingresan a la lámina.

Es interesante señalar que no es posible dar definiciones rigurosas sin empleo de ejemplos mentales. El flujo de un campo vectorial \vec{F} se define por la superficie de entrada Σ dada por

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Se utiliza para simplificar la forma de integral cerrada, que en realidad cuando se integra es una integral doble, usando coordenadas variables. El flujo para este caso tiene dos valores, uno negativo y otro positivo dependiendo de donde se tome el vector normal u ortogonal. Para una superficie Σ cerrada el flujo de un vector \vec{F} únicamente es definido por

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\mathbf{s}$$



donde Σ es un área abierta de una curva delimitada C , el área es proyectada en la superficie sobre el plano x - y . C' es la proyección de C sobre el plano x - y . Donde $d\sigma$ es una superficie diferencial proyectada sobre el plano x - y . El pequeño círculo en la integral indica que la integración doble $dx dy$ es una superficie cerrada y que la integración debe realizarse en toda la superficie. Para el flujo de un vector a través de una superficie curva, se puede usar el teorema que relaciona la integral de superficie proyectada Σ y el ángulo entre \hat{n} y \hat{z} ; y el coseno de este ángulo $\cos(\hat{n}, \hat{z})$ se relaciona con la superficie Σ

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} \frac{dx dy}{|\cos(\hat{n}, \hat{z})|}$$

Si la proyección es tomada sobre plano x - y , resulta que hubiera sido

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \hat{n} \frac{dx dy}{|\cos(\hat{n}, \hat{z})|}$$

Ahora vamos a definir la **divergencia** de la función vectorial \vec{F} en un punto \mathbf{P} . Esto se da en términos de flujo hacia el exterior de \vec{F} a través de una superficie cerrada Σ , que

contiene a \mathbf{P} , y por el volumen v dentro. Si tenemos una superficie Σ_1 y un volumen v_1 . La razón forma el cociente

$$\frac{1}{v_1} \oint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

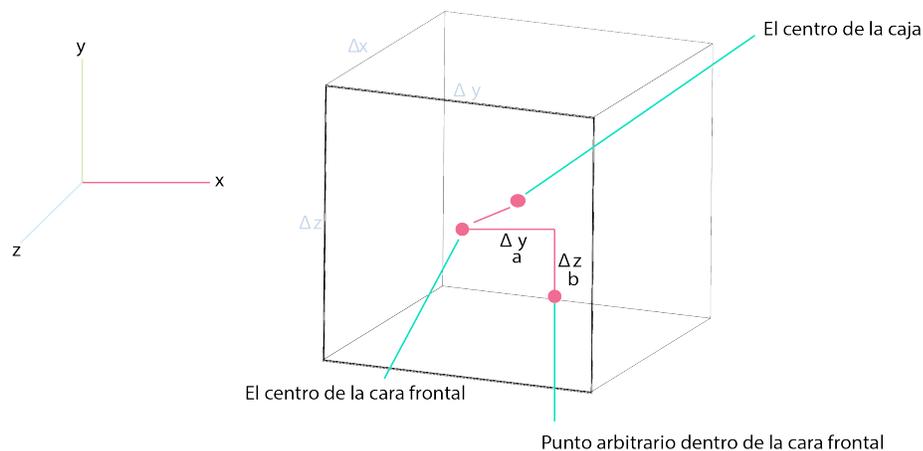
Lo que da el flujo por volumen cerrado. Luego tomamos otra superficie Σ_2 que está enredando a Σ_1 y al punto \mathbf{P} . Forman una razón \vec{F} en \mathbf{P}

$$\frac{1}{v_2} \oint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Cuando este proceso sea continuo indefinidamente, entonces la relación acerca de un único límite se llama divergencia para cualquier sistema de coordenadas

$$\text{div } F = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v} \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right)$$

La divergencia de \vec{F} es la fuerza de la fuente de flujo de \vec{F} , definida en un punto. Ahora derivaremos una fórmula específica para la divergencia de \vec{F} cuando \vec{F} se da en el sistema de coordenadas cartesianas. Concederemos una caja pequeña finita rectangular cuyos bordes coinciden con los ejes x, y, z , que tiene en su centro el punto $\mathbf{P}(x, y, z)$ como en la figura siguiente:



Eventualmente la caja será infinitesimal, con sus lados aproximados a cero. $\oint_{\text{caja}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ se convierte en la suma de seis integrales: sobre el frente, atrás, derecha, izquierda, arriba y abajo, respectivamente. Consideramos el frente de integración como la cara $\hat{x} dx dz$. El valor de \vec{F} sobre la caja se obtiene a través de evaluar $F(x,y,z)$; en el centro de la caja por medio de una expansión de Taylor. El único componente de \vec{F} que contribuye a la parte delantera es la componente x . Expresaremos esta componente como $(F_x)_p$ de \vec{F} evaluada en el centro \mathbf{P} . La palabra caja pequeña aplica a una caja de lados aproximados a cero de primer orden de expansión:

$$\int_{\text{frontal}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{frontal}} \left\{ (F_x)_p + \left[\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_p \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_p (a\Delta y) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right)_p (b\Delta z) \right] + \dots \right\} dy dz$$

Los factores \mathbf{a} y \mathbf{b} surgen de un punto en la cara frontal en una arbitraria posición:

$$\left(x + \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y + a\Delta y, z + b\Delta z \right) \text{ donde } -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}.$$

Las derivadas, valuadas en P, son numéricas y pueden ser movidas a la izquierda del signo integral. Así los términos que involucra \mathbf{a} y \mathbf{b} cuando

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_p a (\Delta y)^2 \Delta z + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} \right)_p b (\Delta z)^2 \Delta y$$

Estos términos y condiciones de orden superior, contienen mayores potencias de los deltas. Por lo tanto, su distribución a la suma se convierte en extremadamente pequeña comparada con la de primer orden cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ y sin ser descuidados, como la caja es suficientemente pequeña, todos los puntos de la cara frontal pueden así ser

considerados que están en el centro de la cara frontal. Puesto que $(F_x)_p$ es también un número, no una función, también se puede poner a la izquierda del signo de integración y se convierte la expresión en

$$(F_x)\Delta y\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Nosotros hacemos implícito en el paréntesis la evaluación en P.

En el caso de la segunda integral, se trata de la tapa trasera de la caja

$$dS_{tracera} = -\hat{x}dydz$$

también

$$\hat{x}(F_{tracera})_x = \hat{x}\left\{(F_x) + \left[\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_p\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_p(a\Delta y) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)_p(b\Delta z)\right] + \dots\right\}$$

Así se convierte en la segunda integral

$$-(F_x)\Delta y\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Por consiguiente, la suma de las dos primeras integrales, caras frontal y trasera de la caja, es

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Por simetría, la tercera y cuarta integral dan

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Asimismo, las siguientes dos últimas integrales

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

El flujo total de F por toda la superficie de la caja infinitesimal es

$$\oint_{Caja} F \cdot dS = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

Si hacemos el volumen $v = \Delta x \Delta y \Delta z$ de la caja que tienda a cero

$$\text{div} F = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\frac{1}{v} \oint_{\text{Caja}} F \cdot dS \right] = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \oint_{\text{Caja}} F \cdot dS \right]$$

$$\text{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{div} F = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (\hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z)$$

De manera explícita para **div F** en el sistema cartesiano es

$$\text{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Un vector cuya divergencia en todas partes es cero se llama vector solenoide. El nombre es referido al hecho de que en un campo magnético creado por un solenoide, la convergencia es cero.

Ejemplos 1:

Calcúlese el divergente de la función vectorial \vec{F}

$$\vec{F} = (x - e^y, \cos(y^2), z^3 - x)$$

Solución:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F} = -2y \sin(y^2) + 3z^2 + 1$$

1.13 Rotor

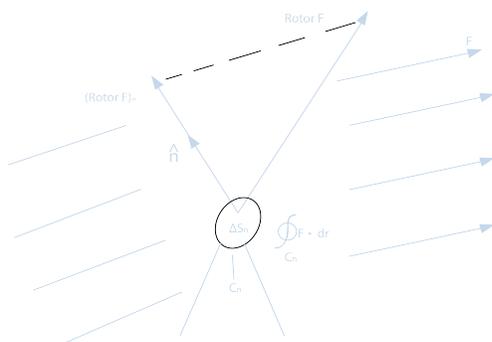
El rotor de \vec{F} , en un punto **P**, ahora podemos definirlo considerando un vector cuya magnitud es el cociente de la circulación de \vec{F} a lo largo de un trazo **C** alrededor de un punto **P**, en un área delimitada por **C**. Asumimos que **C** se encuentra en un plano, así ΔS puede definirse; tomamos esta relación en el límite de ΔS y **C** reduciéndose a cero. Se asume que el límite de esa relación existe y es único.

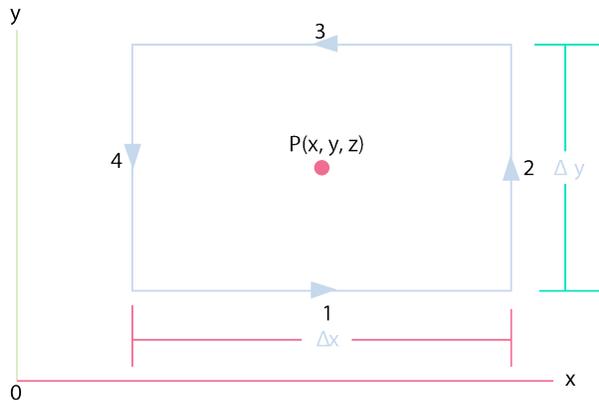
La dirección del vector anterior es el de la normal a ΔS , el sentido positivo se relaciona en la forma de movimiento lineal de un tornillo de mano derecha relacionado con el movimiento de rotación. La magnitud y dirección de este vector dependerá de la ruta de C , lo cual es bastante arbitrario hasta aquí. Ahora asumimos que se sigue el mismo procedimiento para dar con un vector similar en este punto, pero en otra dirección. Luego que hagamos esto para todas las direcciones posibles, se asumirá que para algunas direcciones la magnitud del vector será máximo. El vector determinado por este procesamiento, en el sentido que maximiza la magnitud, se define como el rotor de \vec{F} en P . Las operaciones anteriores darán el componente de rotor de \vec{F} en la dirección normal a ΔS .

Si \hat{n} es un vector unitario en cualquier dirección particular y C_n es un camino cerrado en un plano perpendicular a \hat{n} , entonces, para cualquier sistema de coordenadas, si ΔS_n es la zona delimitada por C_n ,

$$(\text{rotor } F)_n = (\text{rotor } F) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta S_n} \oint_{C_n} F \cdot dr \right]$$

En la siguiente figura se muestra este procedimiento, que se supone que C_n se hace infinitesimal. El resultado obtenido es el componente del rotor de \vec{F} , a lo largo de la dirección del vector unitario \hat{n} . Si \hat{n} es elegido en la dirección del rotor de \vec{F} , en esta dirección es un máximo: el componente es igual a la magnitud del vector.





Nosotros ahora vamos a calcular una expresión para el rotor de \vec{F} , en coordenadas cartesianas.

Considere el componente \hat{z} del rotor de \vec{F} :

$$(\text{rotor } F)_z = (\text{rotor } F) \cdot \hat{z} = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta S_z} \oint_{C_z} F \cdot dr \right]$$

Con los bordes Δx y Δy y el punto $P(x, y, z)$ en el centro de la figura anterior. Entonces $\hat{n} = \hat{z}$ y ΔS_z es $\Delta x \Delta y$. La circulación de \vec{F} , es $\oint_{C_z} F \cdot dr = \oint_{C_z} (F_x dx + F_y dy)$ y la integración de contorno puede dividirse en cuatro partes, todas ellas con $z = \text{constante}$:

$$1. \text{ De } \left[x - \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y - \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right] \text{ hasta } \left[x + \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y - \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right]$$

$$2. \text{ De } \left[x + \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y - \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right] \text{ hasta } \left[x + \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y + \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right]$$

$$3. \text{ De } \left[x + \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y + \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right] \text{ hasta } \left[x - \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y + \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right]$$

$$4. \text{ De } \left[x - \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y + \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right] \text{ hasta } \left[x - \left(\frac{\Delta x}{2} \right), y - \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \right]$$

Entonces $\oint_{C_z} = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4$, donde cada una de las cuatro integrales es $(F_x dx + F_y dy)$.

Se obtienen los valores de los componentes de \vec{F} a lo largo de cuatro partes del camino de integración por expansión de Taylor. La pequeña área rectangular se convertirá posteriormente en un área diferencial, en la primera expresión se mantendrán los dos términos. Para la primera integral $dy=0$. Dejamos que (F_x) represente la componente en x de \vec{F} en P ; entonces la componente en x de \vec{F} en el primer segmento del contorno es

$$(F_x) + \left[\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_p \left(-\frac{1}{2} \Delta y \right) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_p (a \Delta x) \right]$$

donde a es un factor similar al utilizado en la derivada de la forma cartesiana en el divergente, cuya magnitud determina la posición de un punto a lo largo del primer tramo:

$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. El término que contiene a tendrá las contribuciones positivas y negativas que se cancelarán, dejando que el índice de la derivada sea implícito

$$\int_{\text{camino1}} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x-(\Delta x/2)}^{x+(\Delta x/2)} \left[(F_x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta y \right] dx$$

$$\int_{\text{camino1}} (F_x dx + F_y dy) = (F_x) \Delta x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta y \Delta x$$

Para la segunda integral $dx=0$, entonces solamente el componente F_y necesita ser evaluado:

$$F_y + \left[\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{2} \Delta x \right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right) (a \Delta y) \right]$$

En términos de \mathbf{a} da como antes cero; así que, con F_y y sus derivadas evaluadas en P,

$$\int_{\text{camino2}} (F_x dx + F_y dy) = \int_{y-(\Delta y/2)}^{y+(\Delta y/2)} \left[(F_y) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Delta x \right] dy$$

$$\int_{\text{camino2}} (F_x dx + F_y dy) = (F_y) \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y$$

En caso de la tercera integral $dy=0$, otra vez, así que F_y no necesitan ser considerados y la integral se convierte entonces

$$\int_{\text{camino3}} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x+(\Delta x/2)}^{x-(\Delta x/2)} \left[(F_x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta y \right] dx$$

$$\int_{\text{camino3}} (F_x dx + F_y dy) = (F_x) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \Delta y \right)$$

Tenga en cuenta que la expresión para la diferencial aquí es $+dx$, solo en cuanto a la primera integral; pero los límites se invierten. También sería correcto mantener los límites igual que antes si, en lugar de usar $+dx$, fuera empleado $-dx$. Pero sería incorrecto invertir tanto los límites y el signo de la variable independiente. Así que

$$\int_{\text{camino3}} (F_x dx + F_y dy) = -(F_x) \Delta x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta y \Delta x$$

Asimismo, para el cuarto camino $dx=0$ la integral se convierte en

$$\int_{\text{camino4}} (F_x dx + F_y dy) = \int_{y+(\Delta y/2)}^{y-(\Delta y/2)} \left[(F_y) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Delta x \right] dy$$

$$\int_{\text{camino4}} (F_x dx + F_y dy) = -(F_y) \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y$$

Sumando las cuatro contribuciones

$$\int_{C_z} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Por lo tanto

$$(\text{rotor } F)_z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \right] = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Por tanto de manera similar las componentes \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} del rotor \mathbf{F} pueden obtenerse por la permutación cíclica de \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} . Dejando que

$$x \rightarrow y$$

$$y \rightarrow z$$

$$z \rightarrow x$$

Dando

$$(\text{rotor } F)_x = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)$$

otra permutación cíclica de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ nos da

$$(\text{rotor } F)_y = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)$$

En coordenadas cartesianas la expresión del rotor de \mathbf{F} , por tanto es

$$\text{Rotor } F = \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Usando las reglas para la expresión de un determinante, este resultado se puede expresar

$$\text{Rotor } F = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Rotor } F = \nabla \times F$$

Donde el operador en coordenadas cartesianas tiene el mismo valor que tiene para el gradiente y el divergente.

Cuando se utiliza el símbolo de rotor el operador transforma un campo vectorial. En el caso de la pendiente en un punto dado, hay una tasa máxima de cambio de rotación para una función escalar en alguna dirección; a lo largo de cualquier otra dirección la tasa de cambio de la función escalar es igual a la tasa máxima de cambio multiplicada por el coseno del ángulo entre las dos direcciones. La tasa máxima de cambio y dirección particular especifican el vector gradiente. Asimismo, en el caso de los rotores en un punto dado, hay una circulación máxima de la función vectorial por unidad de área cerrada infinitesimal en alguna dirección; a lo largo de cualquier otra dirección la circulación por unidad de superficie es igual al valor máximo multiplicado por el coseno del ángulo entre las dos direcciones.

Un rotor cuyo vector en todas partes es cero, se denomina irrotacional o laminar. El nombre significa que no hay ninguna rotación; es decir, no hay circulación.

1.14 Laplaciano

Supongamos que uno toma la divergencia de una función vectorial, en términos del gradiente de una función escalar en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

Esto se define como el Laplaciano de \mathbf{F} . y se expresa como $\nabla^2 \mathbf{F}$. Significa el divergente del gradiente de \mathbf{F} . En Física el Laplaciano se refiere a un operador elíptico de segundo orden que expresa la teoría del potencial, la propagación de ondas, la conducción de calor, la distribución de tensiones en un sólido deformable.

URL sugerida

<http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EpyuVkpVAAKxbHWgMt.php>

Unidad 2.

Teoría electrostática

Cargas eléctricas opuestas de afinidad singular generan fuerzas eróticas de pasión (ley de Coulomb versión Octavio Paz).

El amor es individual o, más exactamente, queremos únicamente a una persona y le pedimos interpersonal a esa persona que nos quiera con el mismo afecto exclusivo. La exclusividad requiere la reciprocidad, el acuerdo del otro, su voluntad. Así pues, el amor único colinda con otro elemento esencial para su existencia: la libertad. A falta de libertad se da un corto circuito que detiene el corazón.

Desde la época de Newton, destacados científicos habían creído que el universo estaba gobernado por leyes mecánicas: objetos materiales con energía que provocan fuerzas. Para ellos, el espacio circundante no era más que un escenario pasivo. La extraordinaria idea presentada por Faraday y Maxwell era que ese espacio actúa como repositorio de energía **t** transmisor de fuerzas de campo electromagnético. La primera noción de Faraday de líneas de fuerza, que en aquel tiempo fueron ridiculizadas, se convirtió en la segunda revolución científica de la mano de la teoría matemática de Maxwell, que predijo que cada vez que giramos un imán o una corriente eléctrica, una onda de energía electromagnética se extendería hacia fuera en el espacio como una onda en un estanque, cambiando la naturaleza del propio espacio. Maxwell calcula la velocidad de las ondas con propiedades elementales de electricidad y magnetismo, y resultó ser la misma velocidad de la luz. Conjeturó que la luz visible es solo una pequeña banda en un amplio espectro de ondas electromagnéticas, todas viajando a la misma velocidad pero con longitudes de onda que pueden variar de nanómetros a kilómetros. Todo esto seguía siendo solo una teoría con

más escépticos que los adeptos hasta que 25 años después, cuando Hertz enfáticamente lo verificó al producir y detectar lo que ahora conocemos como ondas cortas de radio, así se abrió la puerta a las regiones hasta ahora inimaginables de los conocimientos científicos.

Es casi innecesario exagerar el logro de Faraday y Maxwell, cuando este concepto de campo electromagnético está en toda nuestra tecnología moderna de telecomunicaciones, electrónica, eléctrica y computacional. Ellos unieron electricidad, magnetismo y luz en una teoría simple y compacta; ello cambió nuestra forma de vida en cómo iluminamos hogares, comunicamos masivamente mensajes, navegamos con GPS's, teléfonos inteligentes, radares, satélites, televisión, cine, dinamizan la cultura. Pero fue hasta la teoría especial de la relatividad inspirada por Einstein lo que introdujo la idea de ecuaciones de campo, que se convirtió en la forma estándar utilizada por los físicos de hoy para explicar lo que pasa en la inmensidad del espacio-tiempo y dentro de los átomos del modelo estándar. Faraday y Maxwell han atraído a su parte historiadores por su mayúscula importancia. Aparte de su talento, ambos fueron admirables hombres de espíritu generoso con su ciencia, regalándole al mundo un futuro que hoy es el nuestro. Uno fue autodidacta hijo de un herrero pobre y el otro un hijo educado en Cambridge de un laird escocés. Fueron sus vidas unidas por la curiosidad sobre el mundo físico y su determinación de titanes averiguaron el funcionamiento del electromagnetismo, formando un vínculo fuerte de colaboración y amistad arriesgando todo para desafiar costumbres científicas y convenciones dogmáticas de la época. La teoría del campo electromagnético es su creación conjunta y su propia historia entrelazada de estos dos grandes personajes.

Electricidad y magnetismo es ahora una rama clásica de la física y su desarrollo. En 1600 William Gilbert demostró que no era solo el ámbar como lo creyeron los Griegos antiguos, el único que posee propiedades de electrificación. Para comenzar el estudio de la electricidad, considere los efectos que producen una serie de cargas y fuentes de cargas en una determinada carga de prueba. Las fuentes de carga son origen del efecto sobre una carga de prueba, mas tarde ese estudio cambió con el concepto de campo, a cargas de las fuentes de campo. Para simplificar los cálculos, inicialmente las cargas están en un vacío y se toman en reposo con respecto de las demás. ¿Qué fuerza se produce en la carga de prueba por las fuentes estacionarias de carga? La respuesta aparece de la experimentación, y asume sus resultados como una Ley física llamada de Coulomb.

2.1 Fuerzas eléctricas y campos

La electricidad se ha convertido en omnipresente en la vida moderna, tanto que rara vez pensamos en la vida sin ella. Aunque para los antiguos griegos, primero comenzó a experimentarse con la electricidad alrededor del 700 A.C., no fue hasta los siglos XVIII y XIX que comenzamos a entender claramente la electricidad y cómo aprovecharla. En este apartado, vamos a discutir las cargas eléctricas y la fuerza eléctrica, cuantificados a través de la ley de Coulomb, e introducir el campo eléctrico asociado con cargas. Con estos conceptos, vamos a ser capaces de explicar muchos de los fenómenos electrostáticos de innumerables tecnologías que nos rodean.

En el siglo XVIII se inició la investigación de los fenómenos eléctricos, Stephen Gray y Jean Desaguliers experimentaron con alambres, tubos de vidrio, frotándolos con corcho observando que se electrificaba el vidrio, manifestando fuerzas de atracción sobre trozos de papel. Si bien, ellos en 1729 no fueron los primeros, superaron el razonamiento de Tales de Mileto, identificando lo que en términos modernos se llama carga eléctrica⁴. Las cargas se pueden mover de un cuerpo a otro mediante conductores, o pueden ser aisladas por materiales no conductores como madera, cerámica, plásticos entre otros. Pero fue Francois du Fay en 1734 quien al manipular dos tubos de vidrio previamente electrizados identificó fuerzas de repulsión, afirmando que cargas iguales se repelen y contrarias se atraen⁵.

Probablemente usted ha notado que después de utilizar un peine de plástico a través de su pelo, el peine puede atraer pequeños pedacitos de papel. A menudo, esta atracción es suficientemente fuerte como para suspender el papel en el peine, completamente contrarrestando la fuerza de la gravedad. Otro experimento sencillo es frotar un globo inflado contra una camisa o el cabello, con el resultado de que el globo luego se adhiere a la pared o el techo. Ambas situaciones surgen porque los materiales involucrados se han convertido con carga eléctrica.

Un objeto que se carga eléctricamente ha creado un desequilibrio de carga eléctrica. ¿Qué es la carga eléctrica? Los experimentos han demostrado algunos hechos básicos acerca de las cargas eléctricas. Las propiedades básicas de las cargas eléctricas son:

Hay dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa.

Las cargas eléctricas iguales se repelen entre sí; cargas diferentes se atraen.

Las cargas se dan en unidades discretas.

Los protones son las cargas positivas, los electrones son las cargas negativas.

Objetos eléctricamente neutros tienen un número igual de cargas positivas y negativas.

Objetos eléctricamente no neutros experimentan una fuerza eléctrica en presencia de cargas eléctricas.

Objetos normales por lo general contienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas, es decir, son eléctricamente neutros. Las fuerzas eléctricas surgen solo cuando hay una diferencia en la carga eléctrica, y los objetos tienen una carga neta positiva o negativa. En la escala atómica, los portadores de carga positiva son los protones junto con los neutrones, que no tienen carga eléctrica, comprenden el núcleo de un átomo (que está a unos 10^{-15} m de ancho). Los electrones son los portadores de carga negativa. En un gramo de materia normal, hay cerca de 10^{23} protones y un número igual de electrones, por lo que la carga neta es cero.

Los electrones son mucho más ligeros que los protones, y son más fácilmente acelerados por las fuerzas. Además, ocupan las regiones exteriores de los átomos, y son más fáciles de ganar o perderlos. Los objetos que se cargan así ganan o pierden electrones, pero no protones. La Tabla 2.1 presenta algunas propiedades de protones, electrones y neutrones.

Partícula	Carga (C)	e	Masa (kg)
Electrón	-1.60×10^{-19}	-1	9.11×10^{-31}
Protón	$+1.60 \times 10^{-19}$	+1	1.67×10^{-27}
Neutrón	0	0	1.67×10^{-27}

Tabla 2.1 Propiedades de electrones, protones y neutrones

La carga puede ser transferida de un material a otro. Muchas reacciones químicas son, en esencia, la transferencia de una especie a otra. Frotar dos materiales juntos facilita este proceso al aumentar el área de contacto entre los materiales - por ejemplo, frotar un globo en su cabello-. Dado que es una ganancia o pérdida de electrones que dan una carga neta, esto significa que cuando los objetos se cargan, la carga negativa se transfiere de un objeto a otro. La unidad de carga: en el SI es el Coulomb, C.

2.2 Aislantes y conductores

¿Cómo los materiales responden al quedar cargados? ¿Qué entendemos por "quedar cargados"? Esto será más evidente en breve, pero por ahora, vamos a suponer que "carga" significa desequilibrio del número de partículas subatómicas que confieren la carga eléctrica en un material. Una carga negativa neta se puede lograr mediante la adición de un exceso de electrones a un material, y una carga positiva neta puede ser creada mediante la eliminación de algunos electrones de un material.

Para nuestros propósitos, los materiales responden a quedar cargados en una de dos maneras: con exceso de cargas que pueden moverse libremente y distribuidas uniformemente en el objeto, o el exceso de carga puede permanecer localizado en la región en la que se creó. Conductores y aislantes son dos amplias clases de materiales, que se ajustan a estos criterios - en los conductores, el exceso de cargas se mueve libremente en respuesta a una fuerza eléctrica-. En todos los otros materiales se les llama aislantes, y las cargas en ellos no se mueven libremente.

De hecho, no hay nada especial en concreto en el exceso de carga. El exceso de carga se moverá en el material de la misma manera para cualquier material. En otras palabras, los conductores son materiales en general, donde las cargas se mueven libremente y aislantes son materiales en general en los que no lo hacen. No tiene por que haber exceso de carga para que esto sea cierto, los cargas dentro de los conductores se encuentran todavía en movimiento, aunque, sobre todo, se anulan entre sí.

Conductores:

Por ejemplo metales como plata, oro, aluminio, acero, cobre...

Cargas móviles, se mueven en respuesta a una fuerza.

Con gran número de cargas.

La carga se distribuye uniformemente sobre la superficie del material.

Aislantes:

Por ejemplo el vidrio, la cerámica, caucho y plásticos.

Las cargas son inmóviles.

La carga depositada en un aislante permanece local.

Semiconductores:

Por ejemplo silicio, arseniuro de galio, germanio,...

Entre conductores y aislantes.

Las cargas son muy móviles ...

... pero el número de cargas es pequeña, depende por ejemplo, de la temperatura y pureza.

Las propiedades conductoras pueden variar ampliamente.

El cobre y el aluminio son conductores típicos. Cuando los conductores se cargan en una pequeña región, la carga se distribuye fácilmente en sí sobre toda la superficie del material. Por lo tanto, una carga en el conductor siempre se distribuye por igual en toda su superficie. La carga fluye a través de un conductor con facilidad, y si se les da una oportunidad, fuera de él. Se trata de una corriente eléctrica, como veremos en breve. El vidrio y la goma son aislantes típicos. Cuando aisladores son atraídos y se pegan con un material cargado (por ejemplo, por el roce), solo las áreas de frotamiento se pegan. No hay tendencia a que la carga fluya a otras regiones del material -carga depositada en aisladores se quedará localizada en una pequeña región-.

2.2.1 Carga por conducción

La conducción se carga a través del contacto físico, se da el movimiento electrónico de un objeto a otro. Un ejemplo, cuando está cargando un globo por el roce de su cabello y después de hacer esto, el globo se adhiere fácilmente a la pared o recoge pequeños pedazos de papel, y el pelo se levanta un poco de punta. Lo que realmente ha hecho es transferir carga del globo a su pelo, o viceversa. Cada uno de sus pelos individuales se carga de la misma manera (ya sea todos positivos

o negativos, dependiendo de lo que se frota en el pelo), y las hebras individuales se repelen entre sí. Su repulsión hace que quieran maximizar la distancia entre ellos, lo que se consigue como fuerza que irradia hacia el exterior.

Otro ejemplo, considere frotar una varilla aislante (por ejemplo, caucho, vidrio de plástico duro) contra una pieza de seda. El acto de frotar estos dos materiales aislantes forzaré físicamente algunas cargas para mover de un objeto a otro. Cuando las cargas son transferidas a la barra aislante, que no se mueven - regiones de carga local, creadas en las regiones frotadas. Ninguna carga se ha creado o destruido, simplemente cambiaron algunas cargas de un lugar a otro.

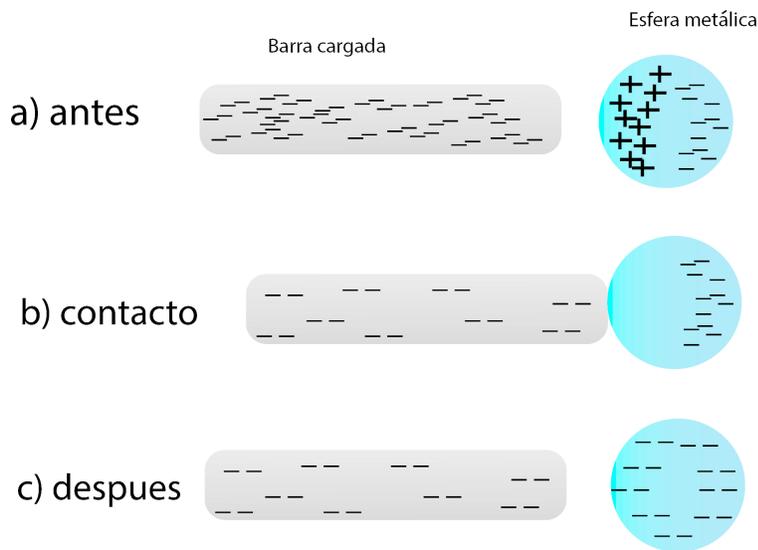


Figura 2.1 Ilustra el proceso de carga de un objeto metálico por conducción. En este ejemplo, se toma una barra de caucho que ya fue cargada (por ejemplo, con un pedazo de seda o el pelo), y se aplica a que cargue un tercer objeto.

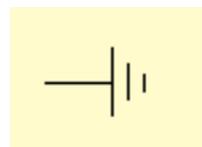
Tome una barra cargada de goma, acérquela a una esfera metálica conductora suspendida de un hilo aislante. Que la barra cargada redistribuya la carga sobre la esfera metálica. El contacto de la esfera y la barra provoca que las diferencias de carga se neutralicen. Cargas negativas salen de la varilla para neutralizar cargas positivas en la esfera. Y esto deja una región negativa neta sobre la esfera.

2.2.1.1 Conexión a tierra

Suena bastante simple. ¿Por qué no podemos simplemente tomar un pedazo de tubo de cobre y frotarlo con un paño? Usted puede, si se tiene cuidado de observar que las cargas fluyen uniformemente a través de un conductor, y si es posible, fuera del conductor completo. Solo conductores aislados pueden ser cargados, conductores eléctricamente contactados no pueden. Por "conectado eléctricamente," entendemos que el conductor con que estamos tratando de cargar no puede tener ningún tipo de vía conductora a tierra. La tierra puede considerarse (esencialmente) reserva infinita de electrones, con la función de fuente o hundimiento de tantas cargas como sea necesario. Como las cargas se distribuyen uniformemente sobre una superficie conductora, si había un camino a la tierra, las cargas móviles seguirían a la tierra, y hasta que no se queden en el conductor.

Dado un camino conductor a tierra, las cargas del conductor siempre seguirán fluyendo por el camino. Si las cargas pueden encontrar la forma a tierra, van a llegar (por ejemplo, a través de tuberías, cables o ¡Usted!. Otra frase para esto, es estar con conexión a la Tierra o aterrizados. Esto es cuando que accidentalmente hacemos conexión entre una cargada (o corriente de carga) de alambre a Tierra... con resultados potencialmente mortales. El llamado "interruptor térmico automático" detecta cuando esto sucede, y muy rápidamente rompe la conexión para la seguridad de instalaciones y usuarios.

¡Resulta también que un conductor permite que las cargas fluyan a distancia! Además, cualquier carga transferida a la varilla de cobre, fluirá a través de ella, y a través de Usted hasta el suelo o tierra física si encuentra esta conexión. En la "toma de tierra" o "punto de tierra" es el lugar en un circuito eléctrico que está conectado a propósito de la tierra, ya sea por razones de seguridad o simplemente para proporcionar un punto de referencia a equipamiento eléctrico. El punto de tierra (o simplemente "tierra") en un diagrama de circuito eléctrico suele aparecer como esto:



2.2.2 Carga por inducción

¿Podemos nosotros cargar sin hacer contacto con un objeto? ¡Sí! Esta es una carga de inducción. Ahora necesitamos explícitamente un punto de tierra o punto de referencia para que esto funcione. Un objeto conectado a un hilo conductor o tubería enterrada en la tierra se dice que está conectado a tierra física, la Tierra misma es el punto de tierra. Como se mencionó anteriormente, la Tierra puede considerarse una reserva infinita de electrones, el abastecimiento o hundimiento en un infinito de número de cargas.

La Figura 2.2 ilustra el proceso de carga de un objeto metálico por inducción. Para cargar un objeto por inducción, no se requiere contacto con el objeto. En primer lugar, tomamos un conductor esférico aislado de metal. De nuestra discusión anterior, es crucial que no contacte a tierra la esfera. Se cuelga de un hilo de algodón como soporte aislante. A continuación, llevamos una varilla cargada negativamente y muy cerca de la esfera, pero sin tocarla. Podemos preparar una varilla de vidrio con carga negativa por frotación con seda (carga el cristal por conducción).

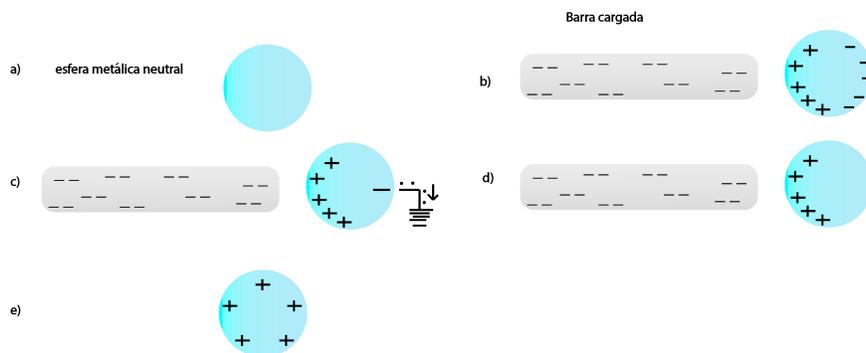


Fig. 2.2 Carga de un objeto metálico por inducción. a) Una esfera metálica neutra con igual número de cargas positivas y negativas. b) La carga en una esfera de metal neutra se redistribuye cuando una varilla se pone cerca de ella. c) Cuando la esfera es entonces puesta a tierra, algunas de las cargas negativas (electrones) la dejan a través del cable de tierra. d) Cuando la conexión a tierra se elimina, el exceso de carga positiva se deja en la esfera. e) Cuando se retira la varilla cargada, el exceso de carga positiva se redistribuye en sí misma en la superficie de la esfera de manera uniforme.

Lleve una varilla cargada negativamente cerca (pero no tocar) de la esfera. Esto crea un desequilibrio de cargas sobre la esfera, debido a la repulsión de la barra cargada. Ponga a tierra el lado opuesto de la esfera - el desequilibrio de la carga obliga a algunos electrones a fluir hacia el suelo, ¡desconecte el cable de tierra!, esto deja una carga neta + en la esfera. Retire la varilla

cargada, la carga neta se tiene que quedar en la esfera, y se distribuirá uniformemente sobre la superficie.

Cuando la varilla cargada está cerca de la esfera conductora, las cargas negativas en la varilla repelen las cargas negativas (electrones libres) en la esfera, con el resultado de que la media de la esfera tendrá una carga neta negativa (Fig. 2.2b). Ahora, si tomamos un hilo conductor y conecta el extremo más alejado de la esfera a tierra (Fig. 2.2c), el exceso de carga negativa en ese lado, repelido por la barra, va a querer fluir por el alambre a tierra, efectivamente drena una cantidad de carga negativa de la esfera. Una vez que hemos hecho esto, la esfera tiene ahora una carga neta positiva.

Con la toma de extracción a tierra, Fig. 2.2d, instantáneamente dejar el lado de la esfera, cargada positivamente, y el otro lado (casi) sin carga, ya que solo drena las cargas negativas. Después de un tiempo muy corto, la esfera conductora alcanza el equilibrio, y debe tener una distribución uniforme de la carga en la superficie del conductor. Por lo tanto, el exceso de carga positiva ha de ser distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera. Nosotros nos quedamos con una esfera conductora cargada positivamente.

Un proceso similar al de carga por inducción en los conductores se lleva a cabo en aislantes (tales como átomos neutros o moléculas, en particular). La presencia de un objeto cargado puede resultar en más carga positiva en un lado de un cuerpo aislante que en el otro, por la reorganización de las cargas en las moléculas individuales. Este proceso se conoce como **polarización**.

Nuestra discusión de carga nos permite ahora apreciar la distinción entre conductores y aislantes. La diferencia en el grado de conductividad entre conductores y aislantes es asombrosamente enorme, un factor de 10^{20} . Por ejemplo, una esfera de cobre cargada conectada a la tierra pierde su carga en una millonésima de segundo, mientras que una esfera de cristal por lo demás idéntica puede mantener su carga por años.

2.3 Ley de Coulomb

Cuando cargue dos objetos, como un globo y el pelo, invariablemente termina observando una atracción o repulsión entre los objetos cargados. ¿Cuál es el carácter de esta fuerza? ¿Cómo, depende de lo lejos que están separados, o cualquier otra cosa? Si continúa experimentando con objetos cargados, usted encontrará que la fuerza debida a objetos con carga eléctrica tiene las siguientes propiedades:

Una fuerza eléctrica tiene las siguientes propiedades:

1. Está dirigida a lo largo de una línea que une las dos partículas.
2. Es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa r_{12} .
3. Es proporcional al producto de las magnitudes de las cargas, $|q_1|$ y $|q_2|$, de las dos partículas.
4. Es atractiva si las cargas son de signo opuesto y repulsiva si las cargas tienen el mismo signo.

Estas propiedades llevaron a Coulomb a proponer en función de la evidencia experimental una forma matemática para la fuerza eléctrica entre dos cargas. La Ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos cargas $|q_1|$ y $|q_2|$, separadas por una distancia viene dada por:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \text{Ec. 2.1}$$

donde k es la "constante de Coulomb," y \hat{r}_{12} es un vector que apunta a lo largo de una línea que une las dos cargas.

La ecuación 2.1 se conoce como "la ley de Coulomb". Establece que solo depende de lo grande que son las cargas (q_1 y q_2), y lo lejos que están (r_{12}). Tenga en cuenta que la fuerza es un vector y el vector unitario adimensional \hat{r}_{12} nos recuerda que la fuerza eléctrica se dirige a lo largo de una línea que une las dos cargas q_1 y q_2 .

La figura 2.3 muestra esquemáticamente la fuerza eléctrica entre dos cargas. La distancia entre las cargas se da en la unidad SI en metros, [m], y las cargas q_1 y q_2 se miden en la unidad SI de carga, el Coulomb, [C]. Las cargas pueden ser positivas o negativas, lo que hace que la fuerza

resultante \vec{F} sea repulsiva cuando ambas cargas tienen el mismo signo, y atractiva cuando son diferentes. La k es la constante de Coulomb para la fuerza relativa eléctrica, tal como G da la fuerza relativa de la fuerza gravitatoria, y tiene el valor SI y unidades:

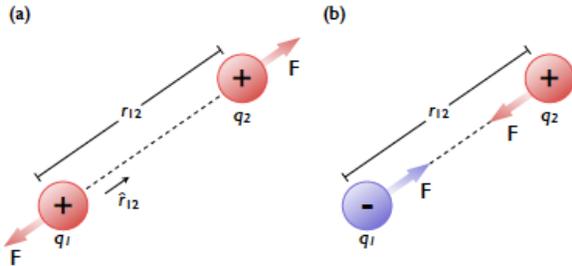


Fig. 2.3 Fuerza eléctrica entre cargas puntuales. (a) Dos partículas Q_1 y Q_2 ambas tienen cargas positivas. La fuerza es de repulsión, como lo sería para dos cargas negativas, y dirigido a lo largo de la línea discontinua que conecta las dos cargas. El vector unitario r_{12} se indica. (b) Dos partículas Q_1 y Q_2 con cargas de signo opuesto, separadas por una distancia r_{12} . La fuerza es ahora atractiva.

$$k = 8.9875 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Ec. 2.2

En la mayoría de los cálculos, k se puede redondear con seguridad a $9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$, lo que hace que sea un poco más fácil de recordar. También, k es más grande que G , la fuerza eléctrica es mucho más fuerte que la fuerza de gravedad. Un par de cargas de 1 Coulomb que interactúan a través de la fuerza eléctrica, es el mismo que dos masas de 10×10^{10} kilogramos que interactúan a través de la fuerza de gravedad. De manera equivalente, se podría decir que la gravedad es solo excepcionalmente débil frente a la fuerza eléctrica.

Cuando una serie de cargas separadas actúan sobre una sola carga, cada uno ejerce su propia fuerza eléctrica. Todas estas fuerzas eléctricas pueden calcularse por separado, una a la vez, y después se añaden como suma de componentes vectores. Este es el principio de superposición de gran alcance, el mismo que utilizó con la gravitación. Esto hace que el cálculo de la fuerza neta de muchas cargas sea mucho más simple de lo que piensa. De hecho, la gravedad y las fuerzas electrostáticas tienen varias similitudes, con algunas diferencias cruciales, que enumeramos a continuación:

a) La fuerza eléctrica es similar a la fuerza gravitatoria:

1. Ambos actúan a distancia, sin contacto directo.
2. Ambos actúan en un vacío, sin un medio, y se propagan a una velocidad c .
3. Ambos son inversamente proporcional a la distancia al cuadrado, con la fuerza dirigida a lo largo de una línea que conecta los dos cuerpos.
4. La forma matemática es la misma, si uno intercambia k y G .
5. Ambas gravitatorias (masas) y eléctricas (cargas) obedecen el principio de superposición.
6. Ambos son fuerzas que se conservan.

b) La fuerza eléctrica es diferente de la fuerza de la gravedad:

1. Las fuerzas eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas. La gravedad es solo atractiva.
2. Las fuerzas gravitacionales son independientes del medio, mientras que las fuerzas eléctricas dependen del medio que interviene.
3. La fuerza eléctrica entre partículas elementales cargadas es mucho más fuerte que la de la fuerza de gravedad entre las mismas partículas.

Técnicamente la ley de Coulomb se aplica en esta forma matemática particular, solo para cargas puntuales o distribuciones de cargas esféricas (en cuyo caso r_{12} es la distancia entre los centros de las distribuciones de carga). La ley de Coulomb cubre fuerzas electrostáticas, que son lo que llamamos fuerzas entre cargas inmóviles (estacionarias). En realidad solo tenemos que tener cuidado cuando tenemos cargas que se mueven a velocidades muy altas, o cuando las cargas se aceleran. Cargas aceleradas producen radiación electromagnética o luz, lo que se llama electrodinámica.

2.4 El Campo eléctrico

Tanto la fuerza de la gravedad y la fuerza electrostática son capaces de actuar en el espacio, sin ningún contacto físico o intervención de un medio material. Es decir, las fuerzas eléctrica y gravitacional pueden actuar a través de un espacio vacío. Este tipo de fuerzas son conocidas como fuerzas de campo. Correspondiente a la fuerza electrostática de un campo eléctrico que existe en la región del espacio, el campo eléctrico ejerce una fuerza eléctrica sobre cualquier otro objeto cargado dentro del campo.

El concepto de campo elimina parcialmente el enigma de "fuerza a distancia", ya que la fuerza de un objeto cargado ahora se dice que es causada por el campo eléctrico en ese punto en el espacio.

El campo eléctrico \vec{E} producido por una carga q en el lugar para una pequeña carga de prueba se define como la fuerza eléctrica \vec{F} ejercida por q sobre q_0 , dividida por la carga de prueba q_0 .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \vec{F} = q_0 \vec{E} \quad \text{Ec. 3.3}$$

La unidad en el **SI** para el campo eléctrico es el Newton por Coulomb [N / C]. La dirección de \vec{E} es la dirección de la fuerza que actúa sobre una carga de prueba positiva q_0 colocada en el campo.

La carga de prueba q_0 es hipotética. Decimos que existe un campo eléctrico en un punto si una carga de prueba en ese momento estaría sujeta a una fuerza eléctrica allí.

Usando las ecuaciones 2.1 y 2.3, podemos escribir la magnitud del campo eléctrico debido a una carga q como la magnitud del campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual q :

$$|\vec{E}| = k \frac{|q|}{r^2} \quad \text{Ec. 2.4}$$

La dirección del campo eléctrico es la misma que la dirección de la fuerza eléctrica, ya que los dos están relacionados por un escalar.

El campo eléctrico producido por una carga depende solo de la magnitud de esa carga que establece el campo, y que tan lejos esa carga se encuentre. No depende de la presencia de una carga de prueba hipotética.

El principio de superposición también es válido para los campos eléctricos, tal como lo hizo para la fuerza eléctrica. Para calcular el campo eléctrico de un grupo de cargas, se puede calcular el campo de cada carga individual, y añadir (como vectores) los campos individuales. La simetría es también muy importante. Por ejemplo, si unas cargas iguales y opuestas se colocan en el **eje x** en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ y $\mathbf{x} = -\mathbf{a}$, el campo en el origen es cero - los campos de las cargas positivas y negativas se cancelan.

Fuente	$ \vec{E} $	Fuente	$ \vec{E} $
Luz fluorescente en tubo	10	Luz ambiente (buen tiempo)	10^2
Globo frotado en el pelo	10^3	Luz bajo nublado	10^4
Fotocopiadora	10^5	Chispas en aire	10^6
Transistor dieléctrico	10^9	Cerca de electrones de un átomo de hidrógeno	10^{11}

Tabla 3.2 Valores aproximados de campo eléctrico en [N/C]

2.4.1 Líneas de campo eléctrico

Una manera conveniente de visualizar el campo eléctrico es dibujar líneas que apuntan en la dirección del vector de campo eléctrico en cualquier punto - las líneas de campo eléctrico-. Las líneas de campo eléctrico tienen tres propiedades fundamentales:

Las propiedades clave de líneas de campo eléctrico:

1. El vector de campo eléctrico \vec{E} es tangente a la línea de campo eléctrico en cualquier punto.

2. La densidad de las líneas (número por unidad de área) es proporcional a la magnitud de \vec{E} .
3. Las flechas en las líneas apuntan en la dirección de que una carga de prueba positiva hipotética se movería. Las flechas no se utilizan siempre.

Así \vec{E} es grande cuando las líneas están muy juntas, y pequeña cuando están muy separadas. A continuación se presentan algunos ejemplos, para que se dé una idea.

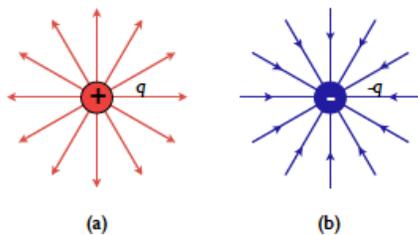


Fig. 2.4 Las líneas del campo eléctrico para cargas puntuales. (a) Para una carga puntual positiva, las líneas se dirigen radialmente hacia afuera. (b) Para una carga puntual negativa, las líneas se dirigen radialmente hacia el interior.

Reglas para las líneas de campo:

1. Las líneas para un grupo de cargas puntuales deben comenzar en las cargas positivas y finalizarán en cargas negativas. Si hay exceso de cargas, algunas líneas comienzan o terminan infinitamente lejos.
2. El número de líneas dibujadas es proporcional a la magnitud de la carga.
3. Las líneas de campo, no pueden cruzarse entre sí.

2.4.2 ¿Qué sucede cuando tenemos dos cargas juntas?

Dos cargas opuestas

La **Figura 2.5** muestra líneas de campo simétricas de dos cargas de igual magnitud y de signo contrario. Aquí se han omitido las flechas para la simplicidad, a estas alturas ya debe saber cómo añadirlas en el dibujo. Esta configuración también es conocida como un dipolo eléctrico. El

número de líneas a partir de la carga positiva debe ser igual al número de líneas que terminan en la carga negativa. Cerca de cada carga, las líneas son casi radial, y la alta densidad de líneas entre las cargas indica un gran campo eléctrico en esta región. Por último, tenga en cuenta que las líneas son simétricas respecto a una línea que une las dos cargas, y una línea perpendicular entre las cargas.



Fig. 2.5 Dipolo eléctrico

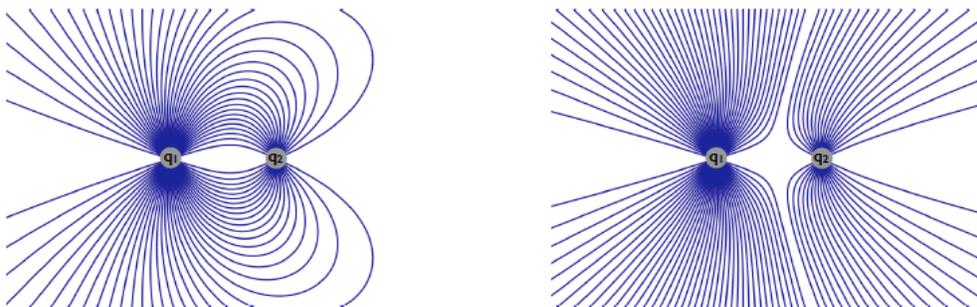


Fig. 2.6 Las líneas de campo correctas para dos cargas del mismo signo, pero de diferente magnitud.

La **Figura 2.5** también muestra las líneas de campo para dos cargas positivas. De nuevo, las líneas están casi radiales cerca de las cargas. Cada carga deja el mismo número de líneas, ya que son de la misma magnitud. Lejos de ambas cargas, el campo se ve casi igual que lo haría con una sola carga doble grande que sea responsable en solitario. Entre las cargas, las líneas de campo "se

abultan", lo que representa la naturaleza repulsiva de la fuerza eléctrica entre cargas iguales. Una vez más, tenga en cuenta que las líneas son simétricas respecto a una línea que une las dos cargas, y a una línea perpendicular a la que está a medio camino entre las dos cargas.

Las simetrías del campo eléctrico que rodean las distribuciones de carga pueden ser muy útiles en la solución de los problemas del campo eléctrico - por ejemplo, sabemos sin mover un lápiz de cálculo que el campo es exactamente cero a lo largo de la línea vertical a medio camino entre las dos cargas.

2.5 Conductores en equilibrio electrostático

Un buen conductor eléctrico es el cobre, incluso cuando eléctricamente es neutro, contiene electrones que no están vinculados a ningún átomo en particular, y que son libres de moverse. Esta es una razón por lo que la carga se distribuye uniformemente sobre la superficie de un conductor - los electrones móviles-.

Aunque los electrones individuales "libres" en el conductor están constantemente en movimiento, en un conductor aislado no hay movimiento neto de carga. Los movimientos aleatorios de todos los electrones libres se anulan. Cuando no se produce ningún movimiento neto de carga, esto se llama equilibrio electrostático. Un conductor aislado es uno que está aislado de la tierra, y tiene las siguientes propiedades:

La **primera propiedad** es más fácil de entender por pensar en lo que pasaría si no fuera verdad, *reductio ad absurdum*. Si hubiera campos dentro de un conductor, las cargas libres se mueven, y al "amontonarse" en las regiones del campo superior e inferior (en función de si son positivas o negativas). Esto contradice la definición misma de un conductor -las cargas se supone que son móviles, y se extienden uniformemente a través del conductor-. Incluso si lo hiciéramos al crear un campo dentro de un conductor, ya que las cargas que son móviles empezarían inmediatamente a fluir a la región del campo eléctrico, reuniendo un número suficiente hasta que se cancelan al cabo de un tiempo. De todos modos, si esto ocurriera, no tienen las cargas equilibrio electrostático, se define porque no hay ningún movimiento neto de cargas.

La **segunda propiedad** es una consecuencia de la repulsión $\frac{1}{r^2}$ de cargas como en la Ecuación 2.4. Si tuviéramos exceso de carga en el interior de un conductor, las fuerzas de repulsión entre estas cargas excedentes empujarían hasta separarse como sea posible. Dado que las cargas son móviles en un conductor, esto sucede fácilmente. Cada carga quiere maximizar su distancia de otra carga, por lo que el exceso de carga migra rápidamente a la superficie.

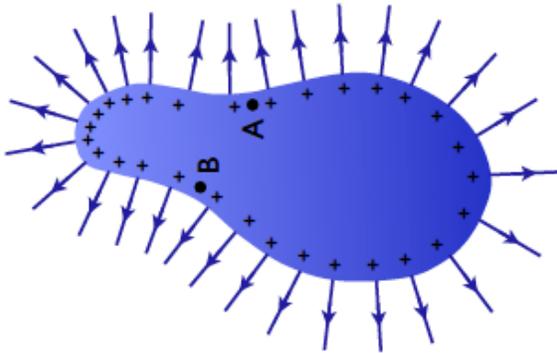


Fig. 2.7 Un conductor de forma arbitraria de carga positiva.

Esto solo es cierto porque la ley de Coulomb (Ecuación 2.4) es una ley de cuadrado inverso. Uno de los muchos hechos especiales sobre leyes de cuadrados inversos, es el que se ha utilizado para poner a prueba la ley de Coulomb con una precisión asombrosa.

La **tercera propiedad** también la entendemos al pensar en lo que pasaría si \mathbf{q} no fuera cierto, que el campo no fuera perpendicular a la superficie del conductor, tendría que tener un componente paralelo a la superficie. Si eso fuera cierto, las cargas libres en la superficie del conductor se sentirían en este campo, y por lo tanto una fuerza (Ec. 2.3) a lo largo de la superficie se haría presente. Bajo esta fuerza, posteriormente las cargas fluyen a lo largo de la superficie, y una vez más, hay un flujo neto de carga, por lo que por definición, no estarían en equilibrio electrostático.

La **cuarta característica** es quizás la más fácil de entender geoméricamente, como consecuencia de la tercera propiedad. El requisito de que las líneas de campo sean perpendiculares a la superficie provoca la presencia de un fuerte punto con un radio de curvatura alta para el campo

eléctrico en esa región, y como resultado, las cargas superficiales móviles fluirán al instante a esta región de alta curvatura. Lo harán hasta que se cancele el campo eléctrico a lo largo de la superficie. En los más agudos puntos de curvatura, las cargas deben fluir en la región para asegurar que el componente paralelo de campo eléctrico superficial está totalmente cancelado. Esto resulta en una densidad de carga de superficie irregular para conductores de forma irregular, pero también un campo eléctrico que es uniforme y perfectamente normal a la superficie en todas partes.

Estas reglas pueden ser más fáciles de captar en forma de dibujos. La Figura 2.8 muestra las líneas del campo entre placas conductoras con cargas opuestas - un ejemplo es un dispositivo conocido como condensador, que estudiaremos más adelante. Obsérvese que el campo en la región entre las placas es muy uniforme, debido al requisito de que sea perpendicular a la superficie de los conductores. Cerca de los bordes de cada placa, el campo "franjas", y empieza a curvarse ligeramente hacia el exterior. Además de los bordes de las placas, el campo empieza a parecerse a un dipolo. Esto no es casual - el exceso de cargas en los mismos bordes de las placas no esencialmente forma un dipolo, por lo que se ve desde lejos, los bordes de esta estructura de placas paralelas parecen una larga fila de dipolos apilados juntos. Microscópicamente, esto es casi exactamente lo que está pasando.

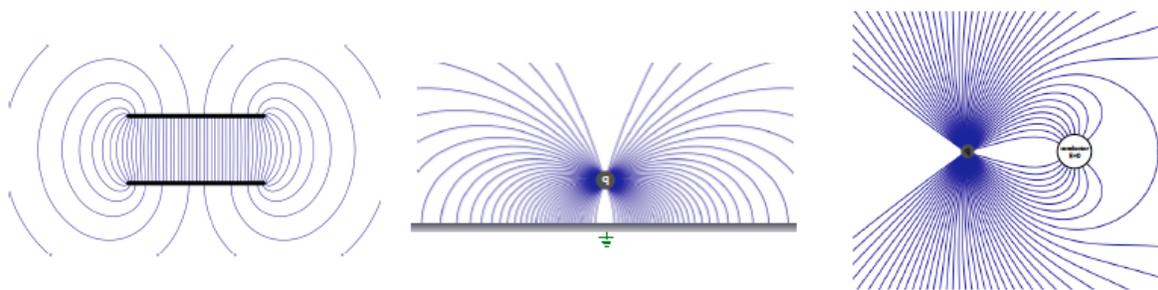


Fig. 2.8 (a) Las líneas de campo entre dos placas de carga opuesta, (b) una carga puntual por encima de un plano conductor a tierra, y (c) una carga puntual cerca de una esfera conductora. Las líneas de campo deben ser perpendicular a la superficie de un conductor en cada punto, y aumenta su densidad cerca de los puntos "afilados". Tenga en cuenta también que no hay líneas de campo dentro de la esfera, como el campo en el interior de un conductor debe ser cero.

La Figura 3.8 también muestra las líneas del campo debido a una carga puntual suspendido sobre una placa de conducción a tierra. En este caso, vemos de nuevo que las líneas de campo siempre cruzan la superficie conductora en ángulo recto.

2.6 Jaula de Faraday

Una "jaula de Faraday" es una región cerrada formada por material conductor - esencialmente un espacio conductor hueco-. Dado que el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero, algo encerrado dentro de un conductor hueco estará completamente protegido de cualquier campo. La eléctrica estática, Usted puede ver su efecto en Jaulas de Faraday a su alrededor, si se fija bien - conductos eléctricos dentro de las paredes son cajas de metal, el interior de su teléfono celular está rodeado de lámina metálica, y su equipo de computadora se esconde dentro de una caja de metal. Todo ello para blindar campos eléctricos exteriores y evitar que alguno del interior contamine el espacio con ruido eléctrico.

Jaulas de Faraday, denominadas así por Michael Faraday, que construyó una en 1836 y explicó su funcionamiento. Las cargas encerradas por las cargas se repelen entre sí, y siempre residen en la superficie exterior de la jaula. Cualquier campo eléctrico externo hará que las cargas en la superficie se reorganicen hasta que se anulan por completo los efectos de campo en el interior de la jaula. No importa cuán grande sea el campo fuera de la jaula, el campo en el interior es exactamente cero, siempre y cuando no haya ninguna carga dentro de la caja. Parece increíble que las cargas en la superficie del conductor saben exactamente cómo organizarse a sí mismas para cancelar exactamente el campo externo, pero esto es realmente lo que sucede.

La aplicación más importante de jaulas de Faraday es ser empleadas en blindaje electromagnético. Un ejemplo es un cable coaxial blindado (por ejemplo, cables RCA para su equipo de música, o el cable coaxial para conectar su caja de cable o satélite), que tiene un escudo de malla de alambre que rodea a un conductor de núcleo interno. El blindaje de malla asegura que ninguna señal del cable del núcleo escape, y quizás más importante, evita que las señales espurias alcancen el núcleo.

Un ejemplo más sutil de una jaula de Faraday es, probablemente, el que está en su cocina. La puerta de un horno de microondas tiene una pantalla de malla metálica integrada en el cristal de la ventana, con pequeños agujeros en ella. Como vamos a descubrir, esto también es una jaula de Faraday, a pesar de que hay agujeros en la pantalla. ¿Por qué aún funciona, a pesar de que hay agujeros? ¿Cómo campos eléctricos se refieren a las microondas? En poco tiempo, usted lo sabrá en este curso.

2.7 El generador de Van de Graaff

En 1929 Robert J. van de Graaff (1901-1967), un nativo de Tuscaloosa, diseñó y construyó un generador electrostático que se ha utilizado ampliamente en la investigación de la Física nuclear. El Dr. Van de Graaff puede ser considerado el inventor del primer acelerador de partículas que emite rayos intensos de energía controlable con precisión, y uno de los pioneros de la Física de partículas.

Los principios de su funcionamiento se pueden entender mediante las propiedades de los campos eléctricos y cargas. **La Figura 2.9** muestra la construcción básica del dispositivo del Dr. Van de Graaff, y la **Figura 2.10** muestra ilustraciones de patente original del Dr. Van de Graaff en el "Generador electrostático" de 1931. Una polea accionada por motor mueve una pasada correa con carga positiva y agujas metálicas en la posición A. Las cargas negativas son atraídas a las agujas de la cinta, que deja el lado izquierdo de la correa con una carga neta positiva. La cinta móvil transfiere estas cargas positivas hacia la cúpula conductora.

Las cargas positivas atraen electrones en la correa a medida que se mueve más allá de un segundo conjunto de agujas en el punto B, lo que aumenta el exceso de carga positiva en la cúpula. Debido a que el campo eléctrico en el interior de la cúpula metálica conductora es insignificante (sería exactamente cero si no hubiera agujeros en la cúpula), la carga positiva puede ser fácilmente aumentada. El resultado es que cantidades extremadamente grandes de carga positiva pueden ser depositadas en la cúpula.

Esta acumulación de carga no puede ocurrir de forma indefinida. Eventualmente, el campo eléctrico debido a las cargas se vuelve lo suficientemente grande como para ionizar el aire

circundante, el aumento de la conductividad del aire. Cuando ioniza lo suficiente al aire, las cargas pueden fluir rápidamente fuera de la cúpula a través del aire - una "chispa" salta fuera de la cúpula al punto de tierra más cercano. Un ejemplo espectacular de esto se puede ver en la **Figura 2.11**.

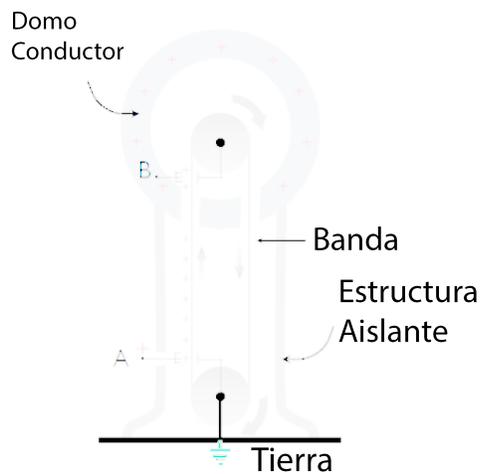


Fig. 2.9 Diagrama del generador van de Graaff.

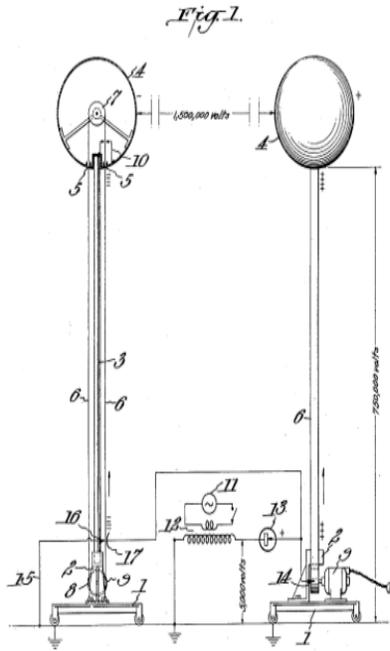


Fig. 1.

Inventor:

Robert J. Van de Graaff,
 By *Byron D. Dornand & C. P. Miller,*
 Attorneys.

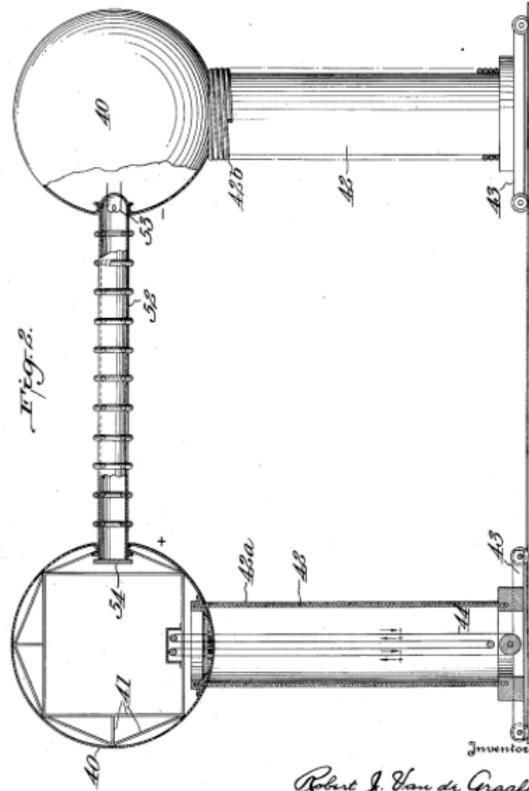


Fig. 2.

Inventor:

Robert J. Van de Graaff,
 By *Byron D. Dornand & C. P. Miller,*
 Attorneys.

Fig. 2.10 Patente del generador van de Graaff (<http://www.google.as/patents/US2847611>)

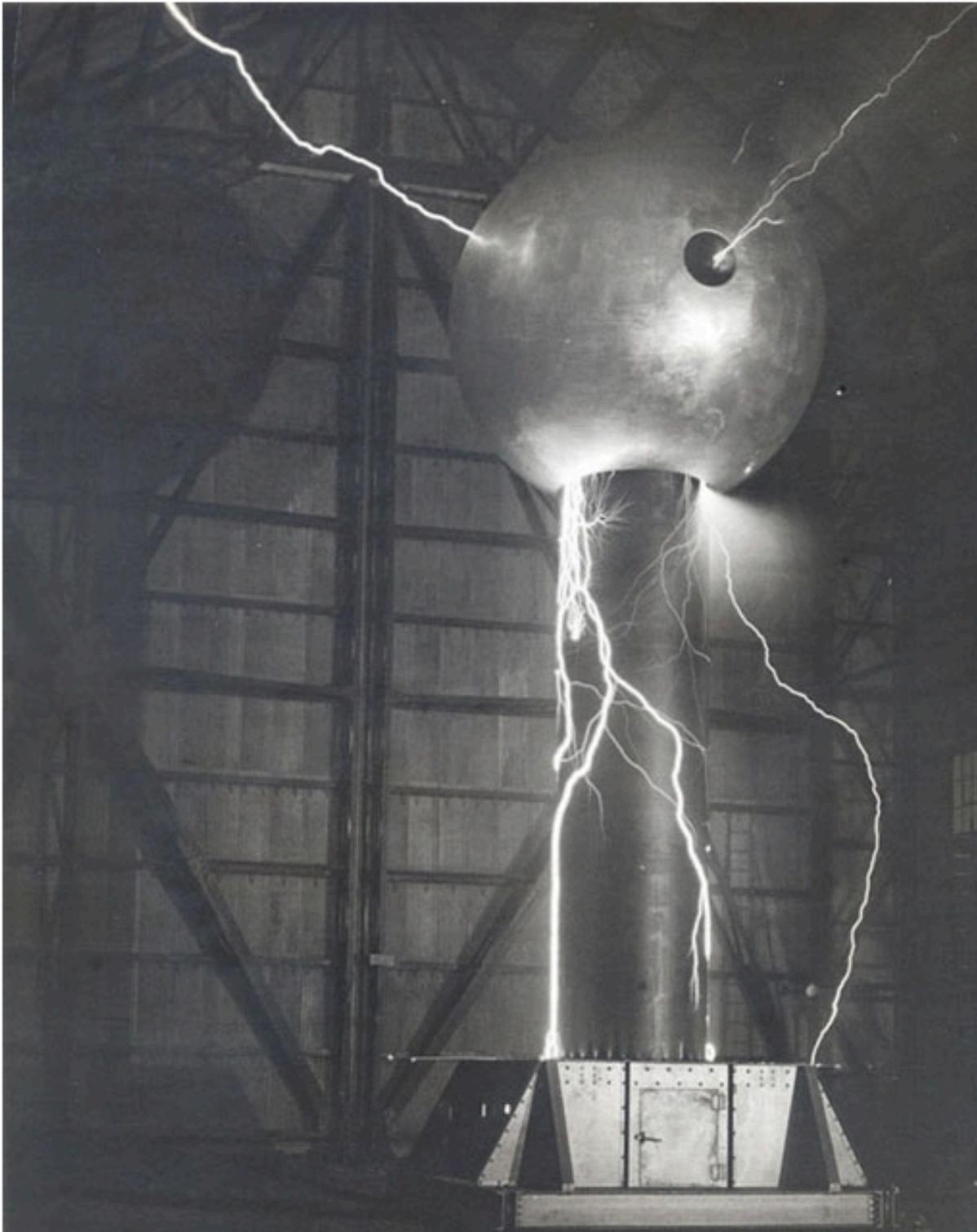


Fig. 2.11 The Van de Graaff Generator, 1933 (<http://libraries.mit.edu/archives/exhibits/van-de-graaff/>)

2.8 Ley de Gauss

La ley de Gauss es una técnica astuta basada en algunos teoremas básicos de cálculo vectorial, para calcular el campo eléctrico promedio sobre una superficie cerrada. ¿Qué entendemos por una superficie cerrada? Una superficie cerrada tiene un interior y un exterior, que es la que encierra un volumen y no tiene agujeros en ella. Una esfera y un cubo son ejemplos sencillos. Sí, debido a la simetría, el campo eléctrico es constante en todas partes en una superficie cerrada, el campo eléctrico exacto se puede encontrar en la mayoría de los casos, mucho más fácilmente que a través de la ley de Coulomb.

2.8.1 Flujo eléctrico

¿Cómo utilizamos esta ley de Gauss? En primer lugar, necesitamos el concepto de **flujo eléctrico**, denotado por Φ_E . El flujo eléctrico es una medida de la cantidad de los vectores de campo eléctrico que penetran en una superficie dada. Si los vectores de campo eléctrico son tangentes a la superficie en todos los puntos, si no penetran en absoluto y el flujo es cero. Básicamente, contamos el número de líneas de campo que penetran en la superficie por unidad de área - líneas que entran en el interior de la superficie son positivas, las que salen al exterior son negativas.

Una analogía de flujo eléctrico es el flujo de agua, que es solo el volumen de líquido que fluye a través de un área por segundo. El flujo eléctrico debido a un campo eléctrico \vec{E} constante en magnitud en la dirección a través de una superficie de área A es $\Phi_E = |\vec{E}| A \cos\theta_{EA}$, donde θ_{EA} es el ángulo que hace \vec{E} con la superficie *normal*.

$$\Phi_E = |\vec{E}| A \cos\theta_{EA} \quad \text{Ec. 2.5}$$



Fig. 2.12 (a) las líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme E penetra en un plano de la zona A perpendicular al campo. El flujo eléctrico Φ_E a través de esta área es igual a $\Phi_E = |\vec{E}|A$. (b) las líneas de campo que representa un campo eléctrico uniforme que penetra un área A que se encuentra en un ángulo θ en el campo. Debido a que el número de líneas que pasan por la zona A' es el mismo que el número a través de A , el flujo a través A' está dada por $\Phi_E = |\vec{E}|A \cos \theta_{EA}$.

Al igual que las fuerzas eléctricas y campos, el flujo también obedece el principio de superposición. Si tenemos un número de cargas dentro de una superficie cerrada, el flujo total a través de esa superficie es solo la suma de los flujos de cada carga individual.

Ahora, a qué se refiere en realidad la ley de Gauss; al flujo eléctrico a través de una superficie cerrada, a la carga eléctrica total contenida dentro de esa superficie. El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga contenida dentro de la superficie.

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \quad \text{Ec. 2.6}$$

Para ver cómo funciona esto, considere la carga puntual en la Figura 2.13a. La superficie más interna es solo una esfera, cuyo radio llamaremos r . La fuerza del campo eléctrico en todas partes en esta esfera es

$$\Phi_E = |\vec{E}|A = k \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi kq \quad \text{Ec. 2.7}$$

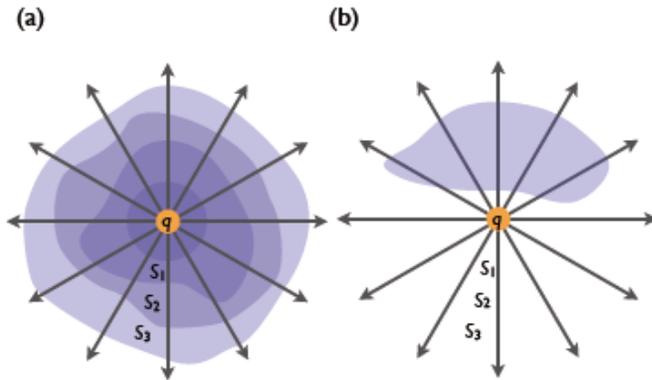


Fig. 2.13 (a) Las superficies de diversas formas que rodean a una carga puntual q encerrada. El flujo eléctrico neto es el mismo a través de todas las superficies. (b) Si la carga puntual está fuera de la superficie, el flujo neto es cero a través de esa superficie ya que es el mismo número de líneas de campo que entra y el que sale. Si no hay carga encerrada por la superficie, no hay flujo neto.

Ahora con el poder de la ley de Gauss, si tomamos cualquier superficie arbitrariamente más complicada, siempre que rodee el punto de carga q y no tiene agujeros en ella, siempre vamos a obtener el mismo flujo. Lo que esto significa es que siempre elegimos superficies más convenientes, aquellas para las que el campo eléctrico es solo una constante en toda la superficie.

Por conveniencia, definimos una nueva constante $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$, conocida como la "permitividad del espacio libre:"

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad \text{Ec. 2.8}$$

k es la constante de Coulomb de la Ecuación 2.2. Esto significa, por supuesto que podemos transformar todas nuestras otras ecuaciones en términos como la Ec. 2.1, en lugar de k . A menudo se les verá de esta manera. Esto crea con la ley de Gauss una forma más sencilla:

En la ley de Gauss: el flujo eléctrico Φ_E a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de la superficie, Q , dividido por ϵ_0 :

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{Ec. 2.9}$$

De manera que el flujo eléctrico se mide en coulombs. La carga total Q , es la suma de las cargas puntuales encerradas.

$$Q = \sum q_n$$

No vamos a derivar la ley de Gauss aquí, sino simplemente afirmar un hecho.

2.8.2 Ley de Gauss como una Ley de Conservación

Fundamentalmente, la ley de Gauss es una manifestación del teorema de la divergencia (a.k.a. el teorema de Green o teorema de Gauss-Ostrogradsky). En esencia, se establece que la suma de todas las fuentes menos la suma de todos los sumideros; da el flujo neto de una región. La misma ley se aplica a los fluidos. Si en un conductor queremos saber cuánto fluido fluye fuera de una cierta región, entonces tenemos que sumar las fuentes dentro de la región y restar los sumideros. El teorema de la divergencia es básicamente una ley de conservación – El total volumétrico de todas las fuentes, menos los sumideros es igual al flujo a través de los límites de un volumen-.

En el caso de campos eléctricos, esto lo expresa la ley de Gauss (ecuación 2.9) - El flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada, debe referirse a una carga neta en el interior del volumen delimitado por esa superficie. La magnitud neta de los componentes del vector de campo eléctrico que apunta hacia afuera desde una superficie, debe ser igual a la magnitud neta de los componentes del vector apuntando hacia el interior, además de la cantidad de carga libre en el interior. Esta es una manifestación del hecho de que las líneas de campo eléctrico tienen que provenir de algún lugar – las cargas-.

La diferencia entre el flujo de las líneas de campo en una superficie y el flujo de salida de una superficie, es solo cuántas cargas se encuentran dentro de la superficie, que es todo lo que la ley

de Gauss dice. Esto se debe fundamentalmente al hecho de que para todas las leyes con cuadrados inversos, como la ley de Coulomb o ley de gravitación de Newton, la intensidad del

campo cae como $\frac{1}{r^2}$, pero el área de una superficie envolvente como r^2 . Las dos dependencias se anulan, y nos quedamos con el resultado de que el flujo es solo en relación a la diferencia entre el número de fuentes y sumideros cerrados.

Aunque la ley de Gauss es muy potente, se utiliza por lo general en casos especialmente con simetría (esferas, cilindros, planos), donde es fácil trazar una superficie de campo eléctrico constante en torno a las cargas de interés (como una esfera alrededor de una carga puntual). Vamos a trabajar a través de algunos de estos ejemplos en la actualidad.

2.8.3 Ejemplo: El campo alrededor de una distribución esférica de carga

Podemos utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico de cualquier distribución esféricamente simétrica de forma gratuita, y como un bono descubre un hecho importante. Una distribución esféricamente simétrica de carga solo significa que el número de cargas por unidad de volumen (la densidad de carga) depende solo del radio desde un punto central. Eso no quiere decir que la densidad no varía con el radio, solo que no varía con el ángulo. Un ejemplo de una distribución de este tipo se muestra en la **Fig. 2.14a** - en este caso, la densidad disminuye con el radio hasta una distancia **R**, más allá del cual es cero.

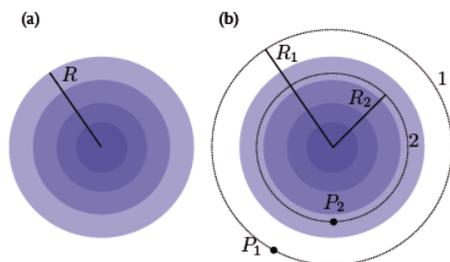


Fig. 2.14 (a) Una distribución de carga esféricamente simétrica. La densidad de carga depende solo de la distancia desde el punto central. (b) Dos superficies gaussianas para determinar el campo en un punto arbitrario exterior (**P1**) y en el interior (**P2**) la distribución.

¿Cuál es el campo eléctrico en un punto arbitrario **P1** fuera de la distribución, o en algún punto **P2** arbitraria en su interior (**Fig. 3.14b**)? ¿Tenemos que calcular el campo de cada fragmento de carga en la distribución y resumir todas juntas? No, este es el punto de la ley de Gauss - si usted tiene un problema con simetrías especiales, por lo general pueden ser explotados para salvarlo de un montón de trabajo matemático.

La distribución de carga es, por definición, esféricamente simétrica. Como te habrás dado cuenta, el campo eléctrico debe asumir la misma simetría que la distribución de carga. Eso significa que el campo eléctrico en este caso será esféricamente simétrico, y será dirigido radialmente desde el punto central. No a otra dirección en especial o único en este problema, solo en la dirección radial. Eso significa que si nos basamos en una superficie esférica de radio $R_1 > R$ que rodea completamente la esfera, superficie 1 en la **Fig. 3.14b**, el campo eléctrico será constante en todas partes en esa superficie. Podemos calcular fácilmente el flujo a través de esta superficie, y por lo tanto el campo eléctrico:

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad R_1 > R$$

Ec. 2.10

$$\Phi_E = E4\pi R_1^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad R_1 > R$$

Ec. 2.11

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \quad R_1 > R$$

Ec. 2.12

Lo que ahora vemos es que este es lo mismo que el campo de una carga puntual - el campo fuera de una distribución de carga esféricamente simétrica se comporta exactamente como si toda su carga se concentrara en el centro-. Esto es, de hecho, una propiedad particular de leyes $\frac{1}{r^2}$, y usted debe recordar que este principio es cierto en el caso de distribuciones de masa gravitatoria

de simetría esférica. La tierra atrae a otros cuerpos, como si su masa se concentra en un punto en el centro. Siempre y cuando se trate de la distribución de simetría esférica, no es ni siquiera una aproximación para hacer frente a cargas puntuales infinitesimales.

Una cosa a tener en cuenta: no se trata de algo así como el centro de masa. Un cubo perfecto no se comporta como si tuviera toda su masa concentrada en su centro. Todo esto realmente viene de

la naturaleza de las fuerzas de $\frac{1}{r^2}$ y el teorema de la divergencia.

¿Qué tenemos en la superficie 2, radio R_2 , dibujada dentro de la distribución de la carga? Del análisis anterior, lo único que importa es la cantidad de carga que está contenida dentro de la superficie. Todo fuera de la superficie aporta una contribución igual, pero en todas direcciones, y todo el asunto se cancela. Encontrar el campo en el punto P_2 es entonces solo una cuestión de averiguar la cantidad de carga que está dentro de la segunda superficie.

3.8.4 Ejemplo: El campo por encima de un conductor plano

Si podemos llegar a aplicar una superficie inteligente sobre la que se aplica la ley de Gauss, podemos resolver algunos problemas que de otra manera serían muy complejos. **La Figura 2.15** muestra una gran placa plana ("infinito"), cuya superficie está cargada.

¿Cuál es el campo en la superficie de esta placa debido a las cargas? Sabemos que es uniforme y constante, pero eso es todo.

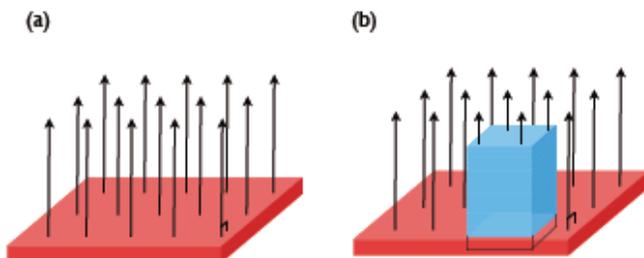


Fig. 2.15 (a) Un gran conductor plano cargado. La distribución de carga en la superficie, y por lo tanto del campo eléctrico, son uniformes. (b) Un cubo es nuestra superficie de la ley de Gauss. A lo largo de los lados del cubo, el flujo es cero, ya que las líneas de campo son paralelas - el flujo es distinto de cero solo a través de las tapas de los extremos-.

Puesto que es un conductor, la distribución de carga en la superficie, y por lo tanto del campo eléctrico, son uniformes. Dado que no queremos limitarnos a una placa de cualquier tamaño en particular, sino más bien, resolver un problema general, diremos que la placa tiene una cierta carga por unidad de superficie, definida como la carga total de la placa dividida por su área de superficie. De esa manera, más adelante puede encontrarse el campo acerca de cualquier plano.

¿Qué tipo de superficie debemos tomar para encontrar el flujo? Una simple caja es una buena opción, ya que resulta práctica debido a la simetría del problema. Tomaremos una caja con una parte superior e inferior, cuya área son A . La zona de los lados no son importantes, ya que resultan paralelas al flujo, pero podemos llamarlos B solo para estar completo el modelo.

¿Por qué deberíamos elegir una caja en este caso? Sabemos que el campo es perpendicular a la superficie de un conductor en todas partes, por lo que en este caso el campo va a ser puramente perpendicular a la placa. Por lo tanto, solo es importante que dibujemos una superficie gaussiana de tal manera que cada parte de la superficie es o bien perfectamente paralela o perfectamente perpendicular a la placa. Un cubo funcionaría perfectamente bien, debe quedar claro para el resto de la discusión.

A lo largo de la superficie que forman los lados de la caja, el flujo es cero, ya que las líneas del campo son paralelas a la misma en todas partes. En la tapa de cierre, el flujo es perfectamente normal. La tapa del extremo inferior está completamente dentro del conductor, por lo que al conocer el campo, ¡tiene que ser cero allí! Si llamamos a la magnitud del campo eléctrico por encima de la placa de E , podemos calcular fácilmente el flujo. Debido a que la placa se supone que es muy grande en extensión, el campo puede suponerse que es completamente uniforme siempre que las distancias encima de la placa que consideramos sean pequeñas en comparación con el tamaño de la placa.

La carga total encerrada por este cubo es solo el área de sección transversal de la placa delimitada por la caja, carga por unidad de área σ_E :

$$Q = \sigma_E A \quad \text{Ec. 2.14}$$

Aplicando la ley de Gauss es ahora sencillo, solo tenemos que encontrar el flujo a través de la tapa de cierre:

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_E A}{\epsilon_0} \quad \text{Ec. 2.15}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma_E}{\epsilon_0} \quad \text{Ec. 2.16}$$

No hay problema, el campo eléctrico es de hecho constante, ya que tiene que ser independiente de la distancia de la placa. Esto tiene sentido, también, ya que la placa se supone que es muy, muy grande. Estrictamente, esto es cierto solo para una placa infinita, pero está muy cerca si consideramos que la distancia encima de la placa es muy pequeña en comparación con el tamaño de la placa. Por último, debe quedar claro ahora que no importa qué tipo de forma usamos para el análisis, con tal que tenga un extremo plano paralelo a la placa, y los lados perpendiculares a ella, como por ejemplo un cilindro.

2.8.5 Ejemplo: El campo interior y externo de un conductor hueco esférico

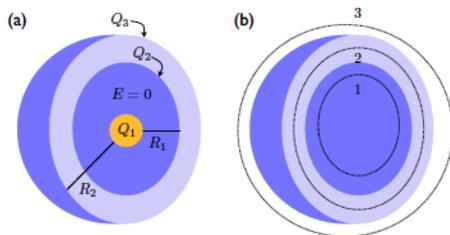


Fig. 2.16 (a) Una carga puntual Q_1 dentro de una cáscara esférica conductora delgada con radio interior R_1 y radio exterior R_2 . La presencia de la carga puntual induce una carga igual pero opuesta sobre la superficie interior del conductor para satisfacer la ley de Gauss. (b) Tres superficies de Gauss para encontrar el campo.

Para cualquier superficie esférica dentro de la esfera, por ejemplo una esfera de radio $r < R_1$ como la superficie 1 en la **Figura 2.16**, solo la carga puntual está dentro del volumen encerrado por la esfera. Si centramos la esfera exactamente en el punto de carga, ya que el campo de una carga puntual es esféricamente simétrica, el campo es constante en todas partes en la superficie de la esfera. La ley de Gauss, entonces nos da:

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad r < R_1$$

Ec. 2.17

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad r < R_1$$

Ec. 2.18

Ahora solo tenemos que resolver para E , y hacer uso del hecho de que $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kQ_1}{r^2} \quad r < R_1$$

Por supuesto, esto tiene mucho sentido - el campo interior es el de la carga puntual, como si el conductor no estuviera allí en absoluto. Como vimos anteriormente, los campos eléctricos son como campos gravitacionales de esta manera - dentro de una cáscara esférica, tanto las fuerzas gravitacionales como las eléctricas se anulan en todas las direcciones por la simetría.

A continuación, consideramos la superficie 2, una superficie interior del propio conductor. Ya sabemos que en todas partes dentro del conductor, es decir, $R_1 < r < R_2$, que debe tener $E = 0$.

Hecho esto parecería demasiado fácil, ¿no? nos perdimos un poco el punto. Al final, también queremos encontrar el campo fuera de la cáscara de todo este modelo, y para ello hay que tener en cuenta la superficie 1. Ahora tenemos que tener cuidado, y pensar en lo que hemos perdido de vista. Para la superficie 2, elaborada dentro del conductor, dijimos $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, ya que tiene que ser para un conductor. Esto es cierto. Pero, ¿cómo puede ser eso, con una carga puntual justo dentro? En realidad, no puede: lo que pasa es que la carga puntual Q_1 induce una igual pero, opuesta carga $Q_2 = -Q_1$ en la superficie interior del conductor. Piénselo de esta manera - si esto no sucediera-, entonces la carga total encerrada por la superficie 2 no sería cero, y por la ley de Gauss del campo dentro del conductor no podría ser cero. La carga inducida Q_2 asegura que la carga total encerrada por la superficie 2 es igual a cero, y por lo tanto, el campo en el interior del conductor es cero ya que tiene que ser así. Entonces tendríamos una contradicción en nuestras manos, que no es aceptada. Esto también es otro aspecto de conductores a la vista como espejos para las líneas de campo. Físicamente, la carga Q_1 atrae cargas móviles opuestas en el conductor, dando una carga negativa neta en la superficie interna.

Ahora, ¿qué pasa con la superficie 3? Antes colocamos la carga Q_1 dentro del conductor, que era eléctricamente neutro. Esto todavía tiene que ser verdad después de colocar la carga, en general, el conductor no debe tener carga neta. Pues bien, si hay una carga $Q_2 = -Q_1$ en la superficie interna, y en general, es neutra, entonces debe haber una carga $Q_1 = Q_3$ inducida en la superficie exterior para cancelar la carga inducida en la superficie interna. La carga negativa neta en la superficie interior atraída por la carga puntual Q_1 deja un déficit de carga negativa en la superficie exterior, para una carga neta superficial positiva. Ahora podemos ejecutar la ley de Gauss para la superficie 3:

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad r > R_2$$

Ec. 2.20

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0} \quad r > R_2$$

Ec. 2.21

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{Q1 - Q1 + Q1}{\epsilon_0} \quad r > R_2$$

Ec. 2.22

$$\Rightarrow E = \frac{Q1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r > R_2$$

Ec. 2.23

Pero el campo fuera de la esfera se ve igual que el de la carga puntual original, mismo que dentro de la esfera. Una vez más, lo que sucede es físicamente que la carga puntual tira de las cargas móviles desde el conductor a su superficie interior, dejando la superficie interior con una carga igual y opuesta. Esto significa que la superficie exterior deberá ser igual al efecto, por lo tanto, de una carga igual que Q1.

Ahora podemos combinar nuestros resultados, y tenemos el campo eléctrico en las tres regiones:

$$E = \frac{kQ1}{r^2} \quad r > R_2$$

Ec. 2.24

$$E = 0 \quad R_1 < r < R_2$$

Ec. 2.25

$$E = \frac{kQ1}{r^2} \quad r > R_1$$

Ec. 2.26

2.8.6 Ejemplo: El campo debido a una línea de carga

Como en el último ejemplo, vamos a utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga, o equivalentemente, un hilo conductor con una carga superficial neta, como se muestra en la **Fig. 2.17a**. ¿Qué significa el campo eléctrico que aparece? Si la línea de carga es infinita (o al menos muy larga comparada con la distancia a que nos

encontramos de ella), todos los componentes transversales del campo se anulan entre sí, por la simetría, el campo debe ser radialmente simétrico sobre el alambre. Es decir, el campo debe apuntar perpendicularmente lejos del eje del alambre.

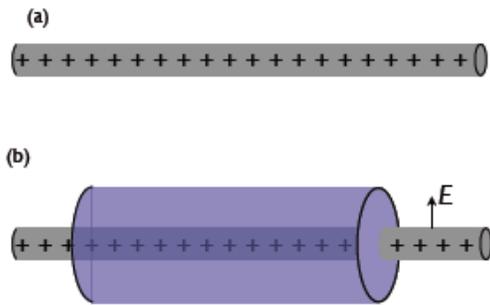


Fig. 2.17 (a) Una carga de línea "infinita", con λ cargas por unidad de longitud. (b) Una superficie gaussiana cilíndrica. En las tapas del cilindro, el campo es paralelo, y el flujo es cero.

Con la simetría del alambre, tiene más sentido utilizar un cilindro dibujado concéntricamente alrededor del alambre como nuestra superficie gaussiana, **Fig. 2.17b**. Elegiremos un cilindro de radio r , y la longitud l . El campo es paralelo a las tapas de los extremos del cilindro, por lo que no contribuyen con el flujo en absoluto. Al ser radialmente simétrico, el campo es perfectamente perpendicular a la superficie redonda del cilindro, y se puede calcular fácilmente el flujo y encontrar el campo eléctrico. En primer lugar, se recuerda que el área de superficie de un cilindro (sin las tapas de los extremos) es $2\pi r l$. En segundo lugar, el cilindro de longitud l encierra una longitud l del cable, que debe contener cargas desde la carga por unidad de longitud.

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

Ec. 2.27

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{2k\lambda}{r}$$

Ec. 2.28

En este caso, el campo se desprende de $1/r$, mucho menor que una carga puntual, pero no independiente de la distancia que hemos encontrado para la lámina de carga. Es independiente de la longitud del cilindro que elegimos, como debe ser: el cable se supone que es infinito, y el valor de λ se eligió arbitrariamente.

Unidad 3.

Energía eléctrica y capacitancia

El principio de la ciencia, la definición, casi es la siguiente:

La prueba de todo conocimiento es el experimento. El experimento es el único juez del científico sobre la "verdad". Pero ¿cuál es la fuente del conocimiento? ¿De dónde vienen las leyes que han de ser probadas? El experimento, sí, ayuda a producir estas leyes, en el sentido de que nos da pistas. Pero también se necesita imaginación para crear a partir de estas ayudas las grandes generalizaciones matemáticas- adivinar los maravillosos, sencillos, pero muy extraños patrones debajo de todos ellos, y luego experimentar para comprobar de nuevo si hemos hecho la suposición correcta. – Richard Feynman

La energía potencial abstracta y el principio de conservación de la energía a menudo permiten resolver problemas difíciles sin tener que lidiar con las fuerzas implicadas directamente. Más al punto, con un enfoque basado en la energía para la resolución de problemas, vamos a trabajar con los escalares en lugar de vectores.

En este capítulo, vamos a aprender que, como en el campo gravitatorio, el campo eléctrico tiene un potencial asociado y energía potencial. El potencial eléctrico será, en muchos casos, lo que normalmente identificamos como "tensión eléctrica" en la vida cotidiana.

3.1 Energía potencial eléctrica

El trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza conservadora, como la fuerza eléctrica, solo depende de la posición inicial y final del objeto, no del camino recorrido entre los estados inicial y final. Por ejemplo, el trabajo realizado por la gravedad depende solo del cambio de altura. Cuando una fuerza es conservadora, significa que existe una función de energía potencial, **PE**, que da la energía potencial de un objeto sujeto a esta fuerza conservadora que solo depende de la posición del objeto. La energía potencial a veces se llama "energía de configuración", ya que solo depende de la posición de los objetos en un sistema. Así, por fuerza eléctrica conservada, podemos encontrar un cambio en la energía potencial eléctrica con solo saber las configuraciones de inicio y final del sistema que estamos estudiando.

Como usted sabe, la energía potencial es una magnitud escalar, y el cambio en la energía potencial es igual al trabajo realizado por una fuerza conservadora.

Diferencial de energía potencial ΔPE

$$\Delta PE = PE_f - PE_i = -W_F \quad \text{Ec. 3.1}$$

donde el subíndice f(i) se refiere a la posición inicial y final, y W_F es el trabajo realizado por la fuerza conservadora **F**.

Esto lo hace la gravedad - mover un objeto de masa **m** a través de un desplazamiento vertical **h** da cambios en el potencial de la energía $\Delta PE = mgh$. Las fuerzas eléctricas y las fuerzas gravitacionales tienen una serie de similitudes útiles, como ya lo sabe, y lo mismo es cierto para sus respectivas energías potenciales.

Considere una pequeña carga de prueba **q** positiva en un campo eléctrico uniforme \vec{E} , como se muestra en la **Figura 3.1**. Como la carga se mueve del punto **A** al punto **B**, que abarca un

desplazamiento $\Delta x = x_f - x_i$, el trabajo realizado en la carga por el campo eléctrico es el componente de la fuerza $\vec{F}_e = q\vec{E}$ paralelo al desplazamiento Δx :

Trabajo realizado para mover una carga q en un campo eléctrico constante \vec{E} :

$$\Delta W_{AB} = \vec{F}_e \cdot \Delta \vec{x} = |\vec{F}_e| |\Delta x| \cos \theta = qE_x (x_f - x_i) = qE_x \Delta x \quad \text{Ec. 3.2}$$

donde q es la carga, E_x es el componente del campo eléctrico \vec{E} a lo largo de la dirección de desplazamiento, y θ es el ángulo entre la fuerza \vec{F}_e y el desplazamiento $\Delta \vec{x}$ (de longitud de Δx).

Tenga en cuenta que q , E_x , y Δx todo puede ser positivo o negativo. También recuerde que el E_x es el componente x del campo eléctrico \vec{E} , no la magnitud. La ecuación 3.2 es válida para el trabajo realizado por una carga por cualquier campo eléctrico constante, no importa la dirección del campo, o signo de la carga. Solo recuerde que el ángulo entre el campo y el desplazamiento sí importa.

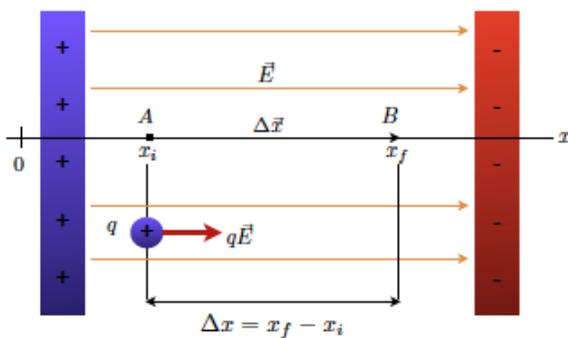


Fig. 3.1. Cuando una carga q se mueve en un campo eléctrico uniforme \vec{E} del punto **A** al punto **B**, cubriendo una distancia Δx , el trabajo realizado a la carga por la fuerza eléctrica es $qE_x \Delta x$. Azul potencial alto, rojo potencial bajo.

Ahora que hemos encontrado el trabajo realizado por el campo eléctrico, el teorema de trabajo-energía nos da el cambio de energía potencial ΔPE de un objeto con carga q a través de un desplazamiento Δx en un campo eléctrico constante \vec{E} es:

$$\Delta PE = -\Delta W_{AB} = -q|\vec{F}_e||\Delta\vec{x}|\cos\theta = -qE_x(x_f - x_i) = -qE_x\Delta x \quad \text{Ec. 3.3}$$

Recuerde, al igual que cualquier otro trabajo, el trabajo realizado que involucra la fuerza eléctrica solo cuenta el desplazamiento paralelo a la fuerza. Usted puede encontrar el componente del campo paralelo al desplazamiento completo, o encontrar el componente del desplazamiento paralelo al campo - es la misma cosa-. La **Figura 3.2** compara una carga que se mueve en un campo eléctrico a una masa en movimiento en un campo gravitatorio. Una carga positiva en movimiento en un campo eléctrico actúa como un movimiento de masas en un campo gravitacional: la carga positiva en el punto **A** cae en la dirección del campo, tal como lo hace la masa. Esto disminuye su energía potencial, y aumenta su energía cinética.

Suponiendo a otras fuerzas que están ausentes, también podemos encontrar el cambio de energía cinética a través de la conservación de la energía. Ya que tanto las fuerzas eléctricas y gravitatorias son conservadoras, podemos encontrar los cambios en la energía cinética y potencial en ambos casos y los comparamos. En ambas situaciones, el cambio en la energía potencial debe ser igual y opuesta al cambio en la energía cinética de la energía que se conserva:

$$KE_i + PE_i = KE_f + PE_f \quad \text{Ec. 3.4}$$

$$(KE_f - KE_i) = -(PE_f - PE_i) \quad \text{Ec. 3.5}$$

$$\Delta KE = -\Delta PE \quad \text{Ec. 3.6}$$

$$\Delta KE + \Delta PE = 0 \quad \text{Ec. 3.7}$$

Para el caso de la gravedad, hemos hecho esto un millón de veces para un objeto de masa m a partir de una altura d y termina a una altura definida 0:

$$\Delta KE + \Delta PE_g = \Delta KE + (0 - mgd) = 0 \quad \text{Ec. 3.8}$$

$$\Rightarrow \Delta KE = mgd \quad \text{Ec. 3.9}$$

Para el caso eléctrico, no es mucho más difícil. Vamos a mover una carga q a través de un campo eléctrico :

$$\Delta KE + \Delta PE_e = \Delta KE + (0 - qE_d d) = 0 \quad \text{Ec. 3.10}$$

$$\Rightarrow \Delta KE = qE_d d \quad \text{Ec. 3.11}$$

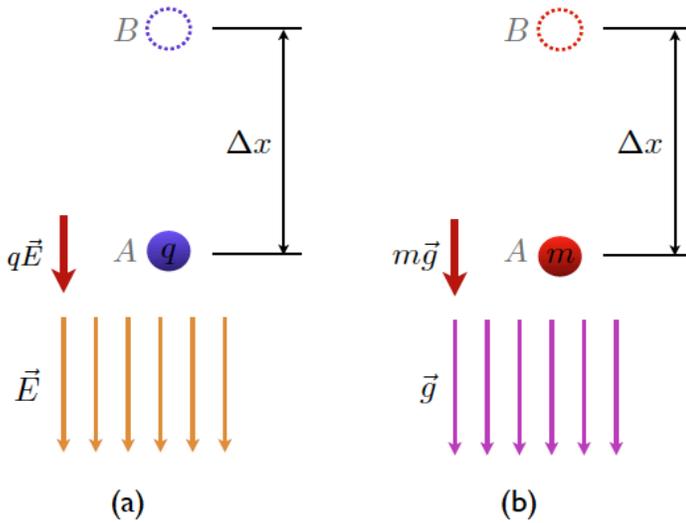


Fig. 3.2 (a) Cuando un campo eléctrico \vec{E} se dirige hacia abajo, el punto **B** tiene una energía potencial eléctrica más baja que el punto **A**. Como una carga de prueba positiva se mueve de **A** a **B**, la energía potencial eléctrica disminuye. (b) un objeto de masa m se mueve en la dirección del campo gravitatorio \vec{g} , la energía potencial gravitatoria disminuye.

Aquí d es la distancia recorrida en el campo eléctrico \vec{E} , y E_d es el componente del campo eléctrico paralelo a la dirección de movimiento. Para cargas positivas, la energía potencial eléctrica funciona igual que la energía potencial gravitatoria. Puesto que la masa viene en un solo

tipo, mientras que la carga viene en variedades positivas y negativas, esto no es toda la historia, sin embargo, para una carga negativa, tenemos que sustituir $-q$ para q en las ecuaciones anteriores - en lugar de caer en el campo eléctrico como la carga positiva, la carga negativa quiere moverse hacia arriba. En otras palabras, la carga negativa "cae para arriba" en comparación con una carga positiva.

Con el fin de hacer a una carga negativa moverse hacia abajo tendríamos que hacer el trabajo contra el campo eléctrico. Recuerde que las cargas positivas gustan seguir la dirección de las líneas de campo eléctrico, mientras que las cargas negativas van a ir en contra de ellos. Para la carga positiva en la **Figura 3.2**, nos estamos moviendo en la dirección que quiere ir la carga. Para una carga negativa en la misma situación, nos estamos moviendo contra la dirección que quiere ir la carga. La carga negativa tiene un cambio positivo en la energía potencial eléctrica, se mueve del punto **A** al punto **B**, es decir, la energía cinética se tiene que perder para que esto suceda. La carga positiva tiene un cambio negativo en la energía potencial, se mueve del punto **A** al punto **B**, es decir, la energía cinética será adquirida para hacer esto.

3.2 Potencial eléctrico

En el capítulo 2, era conveniente definir \vec{E} relacionado con la fuerza eléctrica, a conocer, $\vec{F} = q\vec{E}$. Esto pensamos acerca de las cargas individuales una a la vez, incluso cuando nuestro sistema era una colección de varias cargas, y descartamos la idea de "acción a distancia". Por las mismas razones, nos gustaría definir una variante de la energía potencial eléctrica por unidad de carga, por lo que puede pensarse en la cantidad de energía potencial que se puede ganar o perder por una sola carga presente en un campo eléctrico. Esta cantidad es la diferencia de potencial eléctrico ΔV , y se relaciona con la energía potencial por $\Delta PE = q\Delta V$.

La **diferencial de potencial eléctrico** entre los puntos **A** y **B** es el cambio en la energía potencial eléctrica entre esos dos puntos, dividido por la cantidad de carga que se mueve **Q**:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta PE}{q} \quad \text{Ec. 3.12}$$

donde V_A y V_B son el potencial eléctrico en los punto **A** y **B** respectivamente.

El potencial eléctrico se mide en **Julios por Coulomb**, conocido de otra manera como **Volts**. De hecho, a menudo nos referiremos a potencial eléctrico como "tensión", los dos son sinónimos para nuestro propósito. Al igual que potencial gravitatorio, potencial eléctrico es una cantidad escalar. Es esencialmente una medida del cambio en la energía potencial eléctrica por unidad de carga. Por definición, que se necesita para mover 1J 1C, valor de carga entre dos puntos con una diferencia de potencial de **1V**. Si una carga de 1C se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 V, gana 1J de energía potencial.

Unidades de V y ΔV : [J/C] (Joules por Coulomb o [V] (Volts)

Considere el caso especial de una sola carga q que se mueve a través de una región de campo eléctrico constante, tal como el área entre dos placas paralelas cargadas (**Fig. 3.8**). Si el desplazamiento de la carga Δx es perfectamente paralelo al campo eléctrico, podemos dividir la ecuación 3.3 por q para encontrar la diferencia de potencial ΔV :

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta PE}{q} = -|\vec{E}||\Delta \vec{x}| \cos \theta = -E_x \Delta x \quad \text{Ec. 3.13}$$

Esto nos permite ver que la diferencia de potencial también tiene unidades de campo eléctrico a la distancia. Esto tiene sentido en cierto modo, ya que para que haya una diferencia de potencial eléctrico, baste con moverse a través de un campo eléctrico. Dado que el campo eléctrico tiene las unidades de newtons por coulomb (N / C), podemos hacer la siguiente observación:

Un newton (N) por coulomb (C) es igual a un voltio (V) por metro (m): $1 \text{ N} / \text{C} = 1 \text{ V} / \text{m}$.

Si soltamos una carga positiva, que espontáneamente se acelera en regiones de alto potencial a bajo potencial, las cargas positivas buscan el potencial eléctrico mínimo. Por el contrario, las cargas negativas buscan el potencial eléctrico máximo. El trabajo debe hacerse en cargas positivas para moverlas hacia un mayor potencial, el trabajo que se debe hacer en cargas negativas para moverlos a regiones de menor potencial.

3.2.1 Potencial eléctrico y energía potencial debida a cargas puntuales

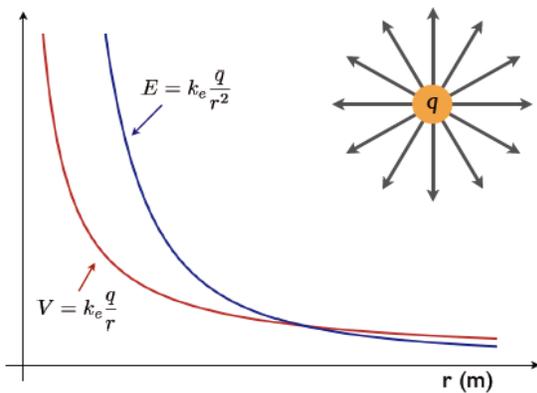


Fig. 3.3 El campo eléctrico \vec{E} y el potencial eléctrico V frente a la distancia r de una carga puntual. Nota: V es proporcional a $1/r$, mientras que E es proporcional a $1/r^2$.

Para cargas puntuales, el campo eléctrico se define a través del espacio, excepto a la derecha de la carga, y funciona de la misma manera que su potencial eléctrico. No hay ningún lugar obvio para llamar a "cero". Además, no podemos conectar un cable de tierra para un solo electrón. (¿Qué podríamos hacer sin el alambre a tierra?) Al final, casi siempre, se define el potencial de una carga puntual como cero a una distancia infinita de la carga en sí. Esto es realmente conveniente, lo crea o no, y deja en claro el hecho de que la única manera de deshacerse del potencial debido a una carga puntual, es desterrar por completo la carga en sí. Con esta definición y algunos cálculos, el potencial eléctrico de una carga q puntual a una distancia r de la carga se puede encontrar como

$$V = k \frac{q}{r}$$

Ec. 3.14

donde r es la distancia desde el punto de carga q , y k es la constante de Coulomb.

Esto nos da el potencial eléctrico - trabajo por unidad de carga - requerido para mover la carga q desde una distancia infinita a un punto r . La **Figura 3.3** separa la comparación entre el campo eléctrico y el potencial eléctrico de una carga puntual en función de la distancia desde la carga. Considere que: solo se puede medir las diferencias de potencial eléctrico. Algunos puntos de referencia siempre se deben definir como $V = 0$. Para una carga puntual, esto es $r = \infty$, para un circuito que es un punto específico.

Algo importante de aclarar para evitar cualquier confusión más tarde: cuando se trata de cargas puntuales como los electrones en campos eléctricos, o los átomos en un cristal (por ejemplo, en la física nuclear o atómica, y la química inorgánica a veces), a menudo utilizamos una unidad más conveniente para la energía, el electrón-voltio. Vamos a encontrar el electrón-voltio más y más a medida que pasa el tiempo, resulta ser muy conveniente cuando nos preocupa un cálculo para un pequeño número de cargas.

Un Electrón Volts [eV] es la energía cinética de un electrón que gana cuando es acelerado a través de una diferencia de potencial de 1V.

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

3.2.2 Energía de un sistema de cargas

El potencial eléctrico también obedece el principio de superposición, al igual que la fuerza eléctrica. El potencial eléctrico total es producto de varias cargas puntuales o sea la suma de los potenciales eléctricos debido a las cargas puntuales individuales. El potencial eléctrico es un escalar, no tenemos que preocuparnos de los componentes, los potenciales eléctricos son justo números de sus contribuciones.

En la **Figura 3.4** se muestra un "3-D" gráfico del potencial eléctrico de un dipolo eléctrico (una carga positiva y una carga negativa muy juntas, como en la **Fig. 3.5**), donde la escala de color de altura representa la magnitud del potencial eléctrico. Como era de esperar desde el principio de superposición, el potencial es cero entre las dos cargas, y se vuelve muy grande cerca de cada carga, al igual que el campo eléctrico (**Fig. 3.5**).

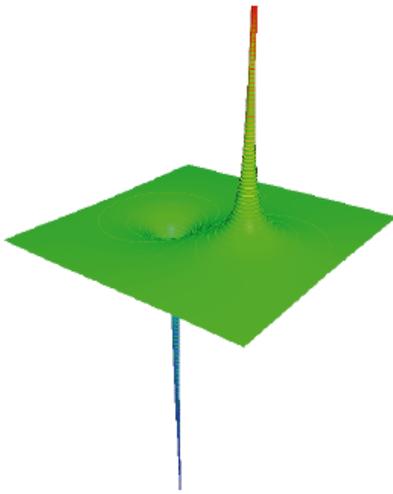


Fig. 3.4 El potencial eléctrico en un plano que contiene un dipolo eléctrico. El (color) escala de altura del potencial eléctrico. Las líneas representan contornos equipotenciales.

3.3 Potenciales y conductores cargados

Así que el trabajo realizado sobre una carga por una fuerza eléctrica está relacionado con el cambio en la energía potencial eléctrica de la carga. También sabemos que el cambio en la energía potencial eléctrica entre los puntos **A** y **B** debe estar relacionado con la diferencia de potencial entre estos dos puntos. Poniendo estos dos hechos juntos, podemos relacionar fácilmente el trabajo y la diferencia de potencial:

$$-W = \Delta PE = q(V_B - V_A) \quad \text{Ec. 3.15}$$

En el capítulo 2, dijimos que para un conductor en equilibrio electrostático, la carga neta reside solo en la superficie del conductor. Por otra parte, hemos dicho que el campo eléctrico justo fuera de la superficie del conductor es perpendicular a la superficie, y que el campo en el interior del conductor es cero. Esto también significa que todos los puntos de la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático son el mismo potencial.

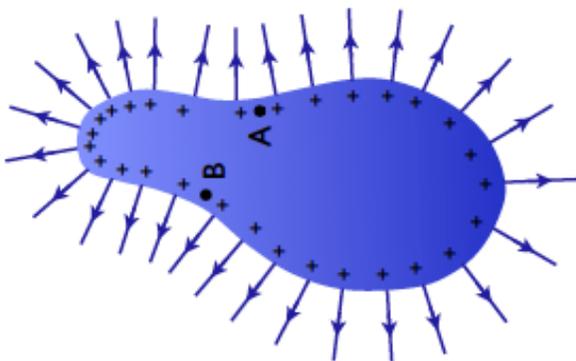


Fig. 3.9 Un conductor de forma arbitraria que lleva una carga positiva.

La ecuación 4.23 nos da un resultado muy general: no se requiere ningún trabajo neto para mover una carga entre dos puntos que están al mismo potencial eléctrico. Matemáticamente, $\mathbf{W} = 0$ siempre $\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A$.

Considere el camino que une los puntos **A** y **B** a lo largo de la superficie del conductor en la **Figura 3.9**. Si nos movemos solo a lo largo de la superficie del conductor, el campo eléctrico \vec{E} es siempre perpendicular a nuestro camino. Dado que el campo eléctrico y el desplazamiento son siempre perpendiculares, no se realiza trabajo cuando se mueve a lo largo de la superficie de un conductor. La ecuación 3.15 luego nos dice que si el trabajo es cero, los puntos **A** y **B** deben estar en el mismo potencial, $\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A = 0$. Puesto que el camino que hemos elegido es completamente arbitrario, esto significa que es cierto para dos puntos cualesquiera de la superficie.

Potenciales y conductores cargados:

1. El potencial eléctrico es una constante en la superficie.

2. El potencial eléctrico es constante en el interior, y tiene el mismo que el valor en la superficie.
3. No se requiere ningún trabajo para mover una carga desde el interior a la superficie, o entre dos puntos en la superficie.

Por supuesto, esto solo es válido para conductores perfectos. Si otras fuerzas disipativas (o no conservativas) están presentes, esto no es cierto, y se requiere trabajo para mover la carga en la presencia de una fuerza disipativa. El análogo eléctrico de fricción o viscosidad es la resistencia.

3.4 Superficies equipotenciales

Una superficie en la que todos los puntos están en el mismo potencial eléctrico se denomina superficie equipotencial. La diferencia de potencial entre dos puntos en la superficie es cero, por lo tanto, no se requiere trabajo para mover una carga a velocidad constante sobre una superficie equipotencial. La superficie de un conductor es por lo tanto, una superficie equipotencial. Las superficies equipotenciales tienen una relación simple con el campo: el campo es perpendicular a la superficie equipotencial en todos los puntos. La **figura 3.10** muestra a las superficies equipotenciales y líneas de campo eléctrico para una sola carga puntual, un dipolo, y dos cargas iguales. Observe que una vez que ha dibujado las líneas de campo eléctrico, el dibujo de superficies equipotenciales es trivial, e inverso.

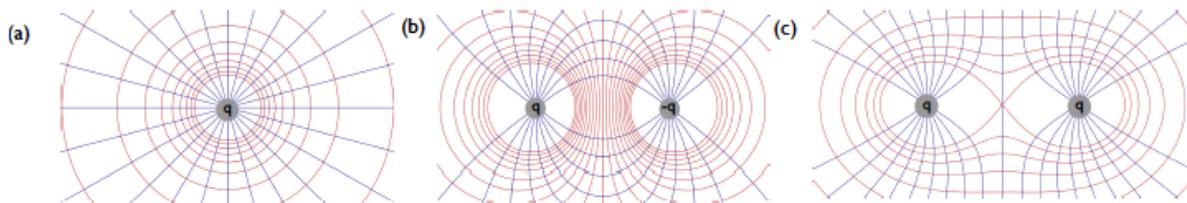


Fig. 3.10 Las líneas del campo eléctrico son líneas azules, y las líneas rojas son superficies equipotenciales para (a) una sola carga puntual, (b) un dipolo eléctrico, y (c) dos cargas iguales. En cada caso, las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico en cada punto. (De nuevo, las flechas se dejan fuera de las líneas de campo por simplicidad. Líneas equipotenciales no necesitan flechas, ya que el potencial es un escalar).

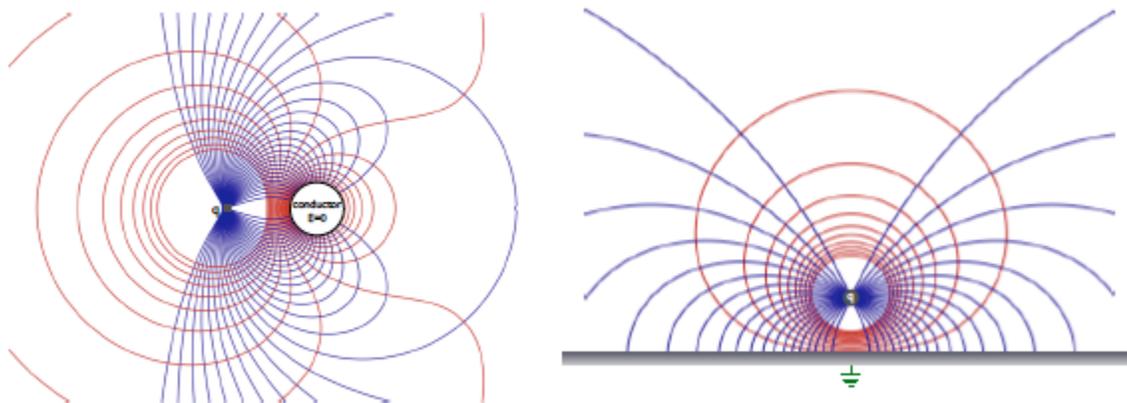


Fig. 3.11 Las líneas de campo eléctrico son líneas azules, y las líneas rojas son superficies equipotenciales, en la izquierda una esfera conductora cerca de una carga puntual q , y justo a la derecha una carga puntual suspendida sobre una placa larga a tierra.

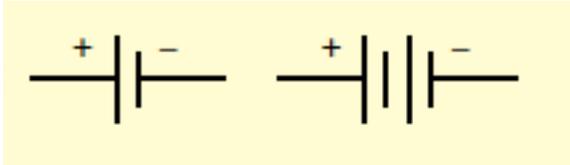
3.5 Fuentes de diferencia de potencial como circuitos elementales

¿Cómo podemos realmente cambiar el potencial eléctrico - nosotros generalmente lo llamaremos tensión a partir de ahora - de un objeto en relación a otro? Carga por inducción o conducción son dos maneras, pero un poco engorroso. Un dispositivo conocido como una fuente de tensión es un elemento de circuito con dos terminales, donde se suministra una diferencia de potencial constante entre estas dos terminales. Lo que se conecta a la terminal "negativa" de la fuente tendrá un ΔV tensión inferior a la terminal "positiva". El uso de un punto de "tierra", también se puede definir de forma experimental con una de las terminales como $V = 0$. Si "tierra" es la terminal negativa, entonces el terminal negativo es $V_{neg} = 0$, y el terminal positivo tiene $V_{pos} = \Delta V$.

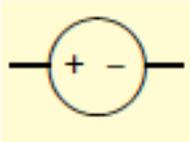
Las baterías son un ejemplo de una fuente de tensión constante, y los enchufes de la pared de su casa son otro ejemplo de una fuente de tensión (aunque esta tensión no es estrictamente constante). Fuentes de tensión ideales son siempre expresadas en los libros de texto, es decir, proporcionan una diferencia de potencial constante, ΔV . Fuentes de tensión reales siempre tienen restricciones, en primer lugar es la cantidad de energía que puede ser originada. A continuación se presentan los símbolos de diagrama de circuitos para las fuentes de tensión

constante: los dos primeros representan baterías, el último es un símbolo genérico para cualquier especie de fuente de tensión:

Baterías:



Fuente general de voltaje constante:



Ahora que sabemos un poco sobre voltaje y conductores, nos estamos moviendo más cerca de ser capaces de describir circuitos eléctricos sencillos. Ahora presentaremos nuestro primer elemento de circuito real, el condensador.

3.6 El capacitor

Un condensador es un componente electrónico que se usa para almacenar carga eléctrica, se utiliza esencialmente en cualquier circuito eléctrico. Los condensadores están en el corazón de las memorias de acceso aleatorio (RAM) y la memoria flash, además de ser crucial para casi cualquier tipo de fuente de alimentación. Es uno de los pilares fundamentales de la electrónica. **La Figura 3.12** muestra un diseño típico para un condensador - dos placas de metal con un poco de materia especial en el medio-. Es difícil de creer que complicados dispositivos como las computadoras se basan en una construcción tan simple, pero es verdad.

Un condensador típico consiste en dos placas metálicas paralelas, separadas por una distancia **d**. Cuando se utiliza un circuito, las placas se conectan a los terminales positivo y negativo de una fuente de tensión, tales como una batería. Una fuente ideal de voltaje insiste en que las dos placas tienen una diferencia de tensión de ΔV , y esto tiene el efecto de tirar de electrones de una placa a otra, dejándolo con una carga neta positiva + Q, y la transferencia de estos electrones a la

segunda placa, dejándola con una carga neta negativa $-Q$. La carga en ambas placas es igual, pero de signo opuesto. En esencia, poniendo las dos placas a diferentes potenciales significa que electrones quieren migrar a la placa con mayor potencial, y dejar la placa con menor potencial.

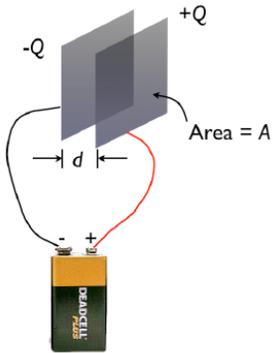


Fig. 3.12 Un condensador de placas paralelas se compone de dos placas conductoras de área A , separadas por una distancia d . La capacitancia de esta estructura es $C = \epsilon_0 A / d$.

La transferencia de carga entre las placas se detiene cuando la diferencia de potencial a través de las placas es la misma que la diferencia de potencial de la fuente de tensión. El condensador es comercializado por esta diferencia de potencial, y por lo tanto, almacena energía eléctrica, hasta algún tiempo después, cuando puede ser reclamada para una aplicación específica. Usted puede pensar en esto como el almacenamiento de energía de un punto de vista, o una respuesta retardada como un amortiguador eléctrico a los cambios de diferencia de voltaje.

Tenga en mente (de nuevo): solo se pueden medir las diferencias de potencial eléctrico. Algunos puntos de referencia siempre se deben definir como $V=0$. En el caso del condensador conectado solo a una batería (sin puntos de tierra), el potencial es cero a mitad del camino entre las dos placas.

Definición de capacitancia:

La capacitancia C es la relación de la carga almacenada en un conductor o la diferencia de potencial entre los conductores:

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right| \quad \text{Ec. 3.16}$$

C es siempre positiva, y tiene unidades de faradios [F], o coulombs por voltios [C/V].

3.6.1 Los condensadores de placas paralelas

La capacitancia de una disposición particular de dos conductores depende de su geometría y disposición relativa. Una estructura común (y simple) es el condensador de placas paralelas, como se muestra en la **Figura 3.12**. En el capítulo 2, afirmamos sin pruebas (no sin razón) que el campo eléctrico entre dos placas paralelas es constante. Pero, ¿qué es el campo entre las placas?

En primer lugar, se asume que las dos placas son idénticas, de tal manera que tienen la misma carga en ellas - una tiene $+Q$ y la otra $-Q$. En segundo lugar, asumimos que el área de placas de A es grande en comparación con su espaciamiento d , de tal manera que podemos ignorar las zonas de borde en el campo "franjas" (ver **Fig. 3.8 y 3.13**). Por último, vamos a conectar las placas de una batería con voltaje total de V .

En la sección 3.8 encontramos que el campo eléctrico por encima de una placa conductora plana está dado por $E = \sigma_e / \epsilon_o$, donde σ_e es la carga por unidad de superficie en el plato. Dado que la carga total en cada plato es solo Q , la carga por unidad de superficie es $\sigma_e = Q/A$. Esto nos lleva

a una expresión más útil para el campo: $E = \frac{Q}{A\epsilon_o}$. De nuevo, esto no es válido cerca de los bordes de las placas donde el campo no es realmente constante.

Ahora donde el campo es constante, sabemos que la diferencia de potencial entre las dos placas es $\Delta V = Ed$, donde d es la distancia entre las dos placas. Combinando esto con los hechos anteriores, podemos encontrar la capacidad del condensador de placas paralelas de la Ecuación 3.16:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_e A}{Ed} = \frac{\sigma_e A}{\left(\frac{\sigma_e}{\epsilon_o}\right)d} = \epsilon_o \frac{A}{d}$$

La capacitancia de un condensador de placas paralelas:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Ec. 3.17}$$

donde d es la separación entre las placas, y A es el área de las placas.

Podemos ver en la ecuación 3.17 que los condensadores pueden almacenar más carga cuando las placas se hacen más grandes. Lo mismo es cierto cuando las placas se acercan más. Cuando las placas están más juntas, las cargas opuestas ejercen una fuerza más fuerte el uno del otro, lo que permite que más carga sea almacenada en las placas. De la ecuación 3.16, un condensador de valor C a una diferencia de potencial de ΔV almacena una carga $Q = C\Delta V$.

La **Figura 3.13** muestra las líneas del campo más realistas de un condensador de placas paralelas. Entre las dos placas el campo es casi constante, pero mucho menos cerca de los bordes de las placas. En tanto que las placas son relativamente grandes en comparación con su separación, podemos para fines prácticos ignorar esta complicación, y nuestra capacitancia calculada a partir de la Ec. 3.17 será muy precisa.

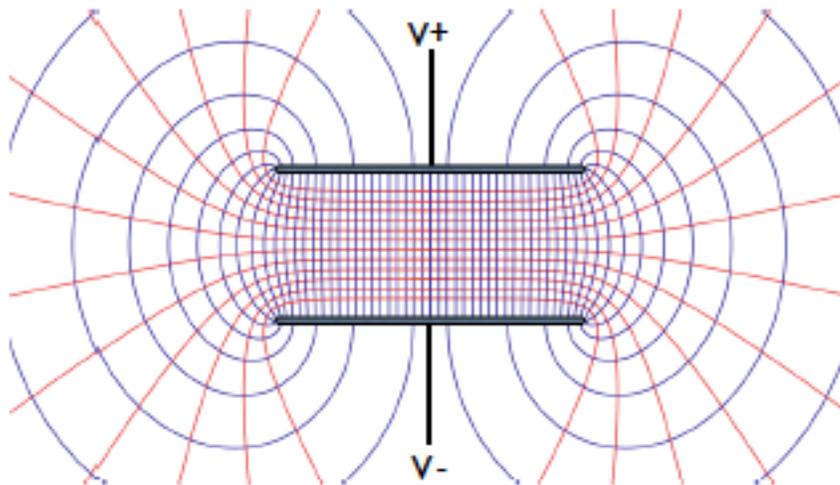


Fig. 3.13 (a) El campo eléctrico cerca de las líneas y entre las placas de un condensador de placas paralelas (azul) y de potencial (rojo). El potencial y el campo son ambos uniforme cerca del centro, pero no es uniforme cerca de los bordes.

Los condensadores forman la base para varios tipos de memoria de acceso aleatorio (RAM) en los ordenadores modernos. La memoria de acceso aleatorio dinámico (DRAM) es un tipo de memoria de acceso aleatorio que almacena cada bit de datos en un condensador separado. Un condensador en una estructura DRAM guarda un bit de información (un "1" o un "0"). Cuando el condensador se carga, almacenará en él mismo el bit "1", y cuando no hay carga almacenada el bit cero, es una memoria Flash, se trabaja de una manera más o menos similar solo que su respuesta es más veloz entre carga y descarga.

3.6.2 La energía almacenada en los condensadores

Los condensadores almacenan energía eléctrica. Cualquiera que haya trabajado con equipos electrónicos tiempo suficiente ha verificado esto de una manera u otra dolorosa. Si las placas de un condensador cargado se conectan a un objeto conductor, el condensador transfiere carga de una placa a otra hasta que se descarga.

Esto es a menudo visto como una "chispa" si el condensador se carga a un voltaje suficientemente alto. Dado que los seres humanos son razonablemente buenos conductores con tensiones elevadas, esto puede ser un problema.

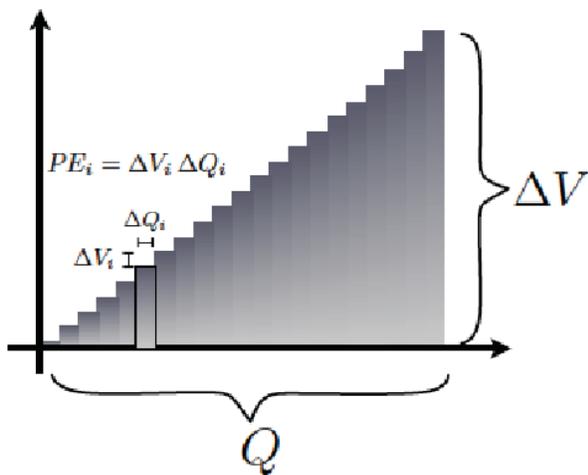


Fig. 3.14 Cada bit de carga ΔQ_i transferido a través de un ΔV_i de tensión contribuye con un poco de energía potencial $\Delta PE_i = \Delta V_i \Delta Q_i$. Resumiendo todas aquellas contribuciones para obtener la energía total almacenada es la misma que se encuentra en el área total de la región sombreada. Si

hacemos ΔV_i y ΔQ_i lo suficientemente pequeñas, la zona es básicamente un triángulo, y en total

$$PE = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

. El eje y cambió en la carga potencial, el eje x , cambió en la carga adicional.

Condensadores cargados almacenan energía, y esa energía es el trabajo necesario para mover la carga sobre las placas. Si un condensador es inicialmente descargado (ambas placas son neutras), se requiere muy poco trabajo para mover una carga ΔQ de una placa a otra a través de la separación d . Tan pronto como se mueve esta carga, un diferencial de potencial $\Delta V = \Delta Q / C$ aparece entre las placas. Esta diferencia de potencial significa que hay que trabajar para mover cargas adicionales sobre las placas. Combinando lo que sabemos hasta ahora, y suponiendo un campo eléctrico constante entre las placas, el trabajo que hay que hacer para mover el primer bit de carga ΔQ tiene que ser:

$$\Delta PE = -\Delta W \quad \text{Ec. 3.18}$$

$$\Delta PE = \Delta Q \cdot E \Delta x \quad \text{Ec. 3.19}$$

$$\Delta PE = \Delta Q \cdot E d \quad \text{Ec. 3.20}$$

$$\Delta PE = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta Q \sigma_e d \quad \text{Ec. 3.21}$$

Pero sabemos que $\sigma_e = \frac{\Delta Q}{A}$, y por lo tanto $\Delta Q = \sigma_e A$, lo que simplifica las cosas:

$$\Delta PE = \Delta Q \Delta Q \frac{d}{A \epsilon_0} \quad \text{Ec. 3.22}$$

Desde $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ para nuestro condensador de placas paralelas,

$$\Delta PE = \frac{(\Delta Q)(\Delta Q)}{C} \quad \text{Ec. 3.23}$$

Si seguimos haciendo esto con más y más ΔQ , hasta que construyamos la carga total Q , podemos encontrar el trabajo total. Como se ilustra en la **Fig. 3.14**, cada nuevo bit de carga ΔQ_i añade un poco de potencial de energía $\Delta V_i \Delta Q_i$. Si sumamos todas esas contribuciones, estamos realmente encontrando solo el área sombreada del triángulo en el gráfico. El área de un triángulo es solo $\frac{1}{2}(base)(altura)$, por lo que el cambio total en el potencial de energía es simplemente:

$$|W| = |\Delta PE| = \frac{1}{2} Q \Delta V \quad \text{Ec. 3.24}$$

Recuerde que $Q = C \Delta V$ debe todavía ser verdad, por lo que podemos escribir la energía almacenada en el condensador de tres maneras diferentes, como se muestra a continuación (observando que la energía almacenada = trabajo realizado). Por ejemplo, se puede verificar que un condensador $5\mu\text{F}$ cargado con una fuente 120V , carga 3.6mJ ($3.6 \times 10^{-3} \text{J}$).

La energía almacenada en un condensador:

$$\frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{Ec. 3.25}$$

Recuerde que las unidades de energía son Julios.

¿Hay una analogía para el almacenamiento de energía eléctrica? Una forma de almacenar energía gravitacional es simplemente bombear una gran masa m de agua hasta una altura Δy , ver **Figura 3.15**. Liberar el agua en un momento posterior, libera la energía potencial almacenada, que podría utilizarse por ejemplo, para hacer girar una turbina. De hecho, esta es una manera de almacenar el exceso de energía generada en los momentos de menor actividad en las plantas de energía para su recuperación posterior.

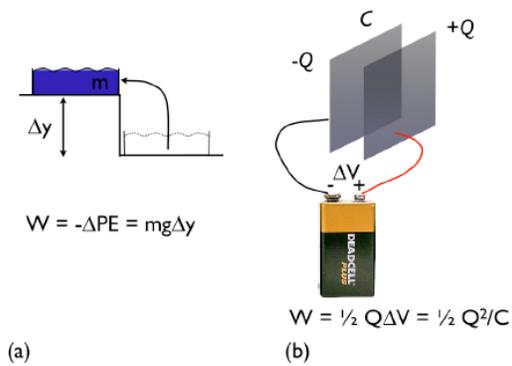
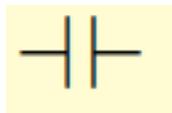


Fig. 3.15 (a) generar una masa m de agua a una altura por encima del almacén a Δy de la tierra con un potencial de energía $mg\Delta y$. (b) Carga de un condensador C con un potencial ΔV de

almacén de energía diferencial $\frac{1}{2} C(\Delta V)^2 = \frac{Q^2}{2C}$.

3.6.4 Circuitos elementales de capacitores

Ahora que sabemos acerca de un segundo elemento de circuito, podemos empezar a hacer algunos circuitos sencillos. Los condensadores se utilizan a menudo en circuitos eléctricos como los dispositivos de almacenamiento de energía. También se utilizan para filtrar alta y baja señal de frecuencias selectivas. El símbolo de diagrama de circuito para un condensador es un recordatorio de la geometría de placas paralelas:



¿Qué podemos hacer con dos componentes de circuitos, condensadores y baterías? Bueno, nosotros podemos conectar un condensador a una batería, como se muestra en la **Fig. 3.16**. ¿Qué hace este circuito? En el momento en que conectamos la batería al condensador, las cargas comenzarán a fluir de una placa a otra en el tiempo, hasta que ambas placas están completamente cargadas. Completamente cargadas, significa que la diferencia de potencial entre las dos placas es la misma que en los terminales de la batería, ΔV . Después de eso... nada. El condensador se

acaba felizmente de almacenar con cargas. Si el condensador está desconectado de la batería, las cargas se mantendrán en las dos placas ya que no tienen camino para escapar. El condensador se mantiene cargado, almacenando así energía, si es que realmente está aislado. Por ejemplo, si una de las placas tiene una trayectoria a tierra, las cargas serían fugas a través de esta conexión a tierra, y la energía se disipa. En un sentido, la memoria FLASH funciona almacenando cargas en cantidades muy pequeñas, placas conductoras aisladas.

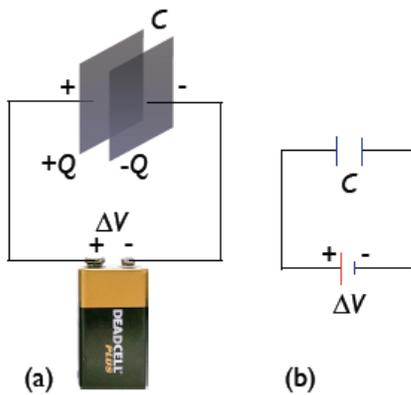


Fig. 3.16 (a) Un condensador de placas paralelas de valor C conectado a una batería que proporciona una diferencia de voltaje ΔV , (b) diagrama de circuito de voltaje para esta configuración.

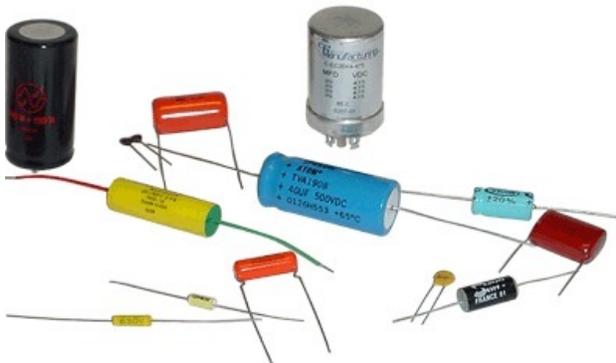


Fig. 3.17 Capacitores comerciales típicos

Los condensadores están fabricados con valores estándar, y mediante la combinación de diferentes maneras, cualquier valor no estándar de la capacitancia se puede realizar. **La Figura 3.18** muestra una disposición en paralelo de condensadores. La placa izquierda de cada condensador está

conectado por un cable (líneas negras) a la terminal positiva de una batería, mientras que la placa derecha de cada condensador está conectado a la terminal negativa de la batería. Esto significa que los condensadores en paralelo tienen ambos el mismo potencial ΔV a través de ellos, la tensión suministrada por la batería es idéntica.

Cuando los condensadores están conectados, los electrones salen de las placas positivas y van a las placas negativas hasta que se alcanza el equilibrio –hasta que la tensión en los condensadores es igual a la tensión de la batería-. La energía interna (química) de la batería es la fuente de energía para esta transferencia. En esta configuración, ambos condensadores cargan de forma independiente, y la carga total almacenada es la suma de la carga almacenada en C_1 y la carga almacenada en C_2 . Podemos escribir la carga de los condensadores utilizando la Ecuación 3.5

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right|.$$

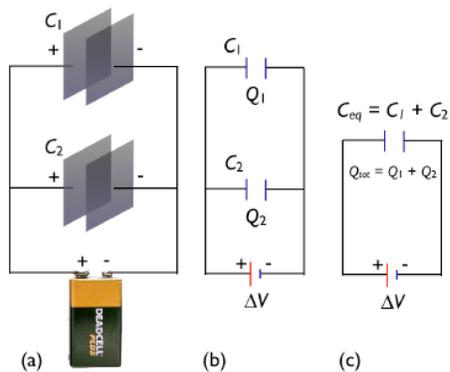


Fig. 3.18 (a) Una conexión en paralelo de dos condensadores a una batería (b) El diagrama de circuito para la combinación en paralelo. (c) Las diferencias de potencial a través de los condensadores es la misma y la capacitancia equivalente es $C_{eq} = C_1 + C_2$

$$Q_1 = C_1 \Delta V$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V$$

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V \quad \text{Ec. 3.26}$$

Lo que esta ecuación muestra es que dos condensadores en paralelo se comportan como uno solo con un valor de $C_1 + C_2$. En otras palabras, "condensadores agregados entre sí en paralelo." Llamamos $C_1 + C_2$ la "capacidad equivalente":

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots \quad \text{Ec. 4.27}$$

El punto clave para los condensadores en paralelo es que el voltaje de cada condensador es el mismo. Una forma de ver esto es que ambos están conectados a la batería por los mismos cables perfectos, así que más o menos tiene que tener la misma tensión por ser superficies equipotenciales. Esto es cierto en general, ya que siempre los cables en los libros de texto se consideran perfectos. De ello se deduce fácilmente que la capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es siempre más que cualquiera de los condensadores individuales.

La Figura 3.19a muestra la segunda combinación simple, dos condensadores conectados en **serie**. Para los condensadores en serie, la magnitud de la carga es la misma en todas las placas. Considere la placa a la izquierda de la C_1 y la placa de más a la derecha de C_2 en **la Figura 3.19**. Puesto que están conectados directamente a la batería, deben tener la misma magnitud de carga, $+Q$ y $-Q$ respectivamente.

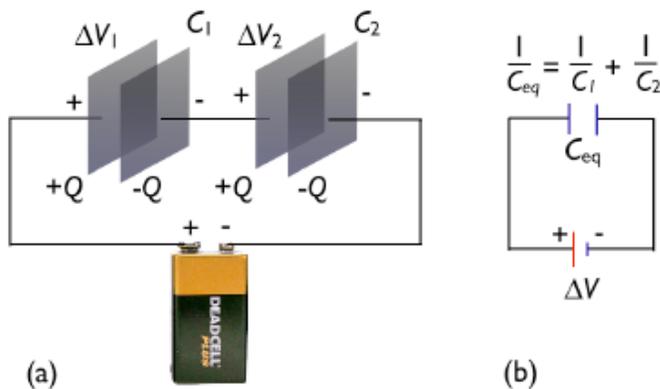


Fig. 3.19 (a) combinación serie de dos condensadores. Las cargas de los condensadores son iguales. (b) Diagrama del circuito correspondiente a (a). La capacitancia equivalente se calcula a

partir de la relación recíproca,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Dado que las dos placas intermedias (la placa derecha de C1 y la placa izquierda de C2) no están conectadas a la batería en absoluto, juntas no deben tener carga neta. Por otro lado, las placas izquierda y derecha del mismo condensador tienen que tener la misma magnitud de carga, por lo que esto significa, todas las placas tienen una carga cualquiera de + Q o Q almacenada en ellos. Todas las placas derechas tienen $-Q$, y todas las placas de izquierda tienen una carga $+Q$

¿Podemos reducir esta combinación en serie a un solo condensador equivalente, como lo hicimos en el caso paralelo? Claro, con un poco de matemáticas. Un solo condensador equivalente al condensador en serie, **la figura 3.19b**, debe tener una carga de $+Q$ en la placa de la derecha, y $-Q$ en su placa izquierda- por lo que la carga total almacenada es aún $\pm Q$ en cada plato . Además, debe tener una diferencia de potencial igual a la de la batería, ΔV . Utilizando la ecuación 3.24:

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \quad \text{Ec. 3.27}$$

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{Ec. 3.28}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

La conservación de la energía requiere que toda la diferencia de potencial ΔV en la batería se "agote" en algún lugar. Ya que nuestros cables se supone que son perfectos, el único lugar en el que el potencial puede ir es en los condensadores. Por lo tanto, para el caso de la serie el voltaje en C1 y C2 en conjunto deben sumar la batería:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad \text{Ec. 3.29}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{Ec. 3.30}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Ec. 4.31

De ello se desprende que la capacitancia equivalente de una combinación en serie es siempre menor que cualquiera de los condensadores individuales. El punto clave para los condensadores en serie es que la carga de cada condensador es la misma, y la misma que la carga en el condensador equivalente.

¿Lo que separa a las placas de nuestro condensador de placas paralelas es algo más que aire? Como es de esperar, esto cambia la capacitancia. Un **dieléctrico** es otro nombre para un material aislante (como el caucho, papel encerado, la mayoría de la cerámica y plásticos). Cuando ponemos un dieléctrico entre las placas del condensador, la capacitancia aumenta. Si el dieléctrico llena totalmente la región entre las placas, el aumento es proporcional a una constante k . Observamos que a veces la constante dieléctrica se escribe como lugar de k , pero es la misma cosa.

La **Figura 3.21** muestra el efecto de un dieléctrico cuando se inserta en un condensador de placas

paralelas. Sin el dieléctrico, sabemos que $\Delta V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$. Si ahora insertamos el dieléctrico, el voltaje se reduce a:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k} = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r}$$

Ec. 3.32

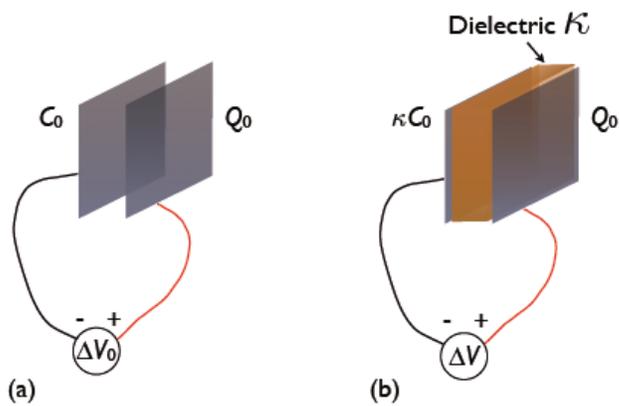


Fig. 3.21 (a) Con aire entre las placas, la tensión a través del condensador es ΔV_0 , la capacitancia es C_0 , y la carga es de Q_0 . (b) Con un dieléctrico, la carga es todavía Q_0 , pero el cambio de voltaje y la capacitancia se hace mayor.

Lo que ocurre es que una parte de la diferencia de potencial originalmente a través de las placas del condensador se utiliza ahora en el propio dieléctrico. Al ser un aislante, el dieléctrico puede apoyar a las regiones de carga, a diferencia de un conductor. Cuando se inserta en el condensador, la parte del dieléctrico cerca de la placa + Q_0 se acumula una carga negativa parcial en respuesta, y la parte cerca de la placa - Q_0 se acumula una carga positiva parcial. Esto tiene el efecto de "cancelar" la parte de la + Q y -Q en las placas, por lo que la pila proporciona más carga para compensar. Esto continúa hasta que se alcanza un equilibrio, y el dieléctrico puede demandar más carga.

Al final, ya que demanda el dieléctrico un poco de suplemento, el condensador con un dieléctrico almacena dentro más que el condensador sin dieléctrico. La cantidad total de carga actual, incluyendo el bit de "extra" "demandado" por el dieléctrico, es proporcional a k, por lo que la capacidad de la nueva estructura se incrementa en un factor de k:

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{kQ_0}{\Delta V_0} = \frac{\epsilon_r Q_0}{\Delta V_0} \quad \text{Ec. 3.33}$$

Para el caso de un capacitor de placas paralelas:

$$C = k\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Ec. 3.34}$$

el dieléctrico aumenta la capacitancia por un factor de **k** a la constante dieléctrica. La constante dieléctrica también se llama ϵ_r .

Constante Dieléctrica

Material	Constante Dieléctrica (k)
Vacío	1
Aire	1.00059
Polipropileno	2.2
Poliestireno	2.6
Policarbonato	2.8
Poliéster	3.3
Papel	3.5
Aceite de transformadores	4.5
Vidrio pyrex	4.7
Mica	5.4
Porcelana	6.5
Silicio	12
Agua	80.4
Cerámica de titanio	130
Titanato de estroncio	310

Fuente: Resnick, H & K. Física Vol. 1 , Z & Y. Física Universitaria

Unidad 4.

Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo son de enorme riqueza en términos de la experimentación tecnológica sobre fenómenos electromagnéticos, están intrínsecamente en las ecuaciones de Maxwell. Ayudan a la determinación de la Ley de Coulomb para fuerzas entre cargas; en la investigación de Amper en la interacción de corrientes y en la observación de Faraday de campos variables.

En las ecuaciones de Maxwell, encontrarán dos tipos de campo eléctrico: El campo electrostático producido por la carga eléctrica y el campo eléctrico inducido, producido por un campo magnético variable. La ley de Gauss para campos eléctricos se ocupa del campo electrostático, y usted encontrará que esta ley puede ser una herramienta de gran alcance, ya que se relaciona el comportamiento espacial del campo electrostático con la distribución de carga que lo produce.

4.1 La forma integral de la ley de Gauss

Hay muchas maneras de expresar la ley de Gauss, y aunque la notación difiere entre los libros de texto, la forma integral en general se escribe así:

$$\oint_s \vec{E} \circ \hat{n} da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_o}$$

La ley de Gauss para campos eléctricos (forma integral).

Donde:

\oint Esta integral es sobre una superficie cerrada. Nos dice para resumir las contribuciones de cada parte de la superficie.

\int_s Es una integral de superficie (no un volumen o una línea integral).

\vec{E} Es el vector de campo eléctrico.

\circ Es el producto interno o punto en [N/C].

\hat{n} Vector unitario normal a la superficie.

Da un incremento infinitesimal de superficie dada en metros cuadrados.

q Cantidad de carga en coulombs.

enc Refiere a carga uniforme encerrada.

ϵ_o Constante de permitividad en el espacio libre.

El lado izquierdo de esta ecuación no es más que una descripción matemática del flujo eléctrico - el número de líneas del campo eléctrico - que pasa a través de una superficie cerrada S, mientras que el lado derecho es la cantidad total de carga contenida dentro de esa superficie dividida por una constante llamada permitividad del espacio libre.

La carga eléctrica produce un campo eléctrico, y el flujo de ese campo que pasa a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga total contenida dentro de esa superficie.

En otras palabras, si usted tiene una superficie cerrada real o imaginaria de cualquier tamaño y forma y no hay ninguna carga dentro de la superficie, el flujo eléctrico a través de la superficie debe ser cero. Si se va a colocar un poco de carga positiva en cualquier lugar dentro de la

superficie, el flujo eléctrico a través de la superficie sería positivo. Si luego de agregar una cantidad igual de carga negativa dentro de la superficie (lo que la carga total encerrada es cero), el flujo sería otra vez de cero. Recuerde que es la carga neta encerrada por la superficie que importa en la ley de Gauss.

Para ayudarle a entender el significado de cada símbolo en forma integral de la ley de Gauss para campos eléctricos, aquí está una vista ampliada:

¿Cómo es útil la ley de Gauss? Hay dos tipos básicos de problemas que se pueden resolver utilizando esta ecuación:

(1) Teniendo en cuenta la información sobre la distribución de la carga eléctrica, usted puede encontrar el flujo eléctrico a través de una superficie que encierra esa carga.

(2) Teniendo en cuenta la información sobre el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada, se puede encontrar la carga eléctrica total encerrada por esta superficie.

Lo mejor de la ley de Gauss es que para ciertas distribuciones altamente simétricas de cargas, se puede utilizar para encontrar el propio campo eléctrico, y no sólo el flujo eléctrico a través de una superficie.

Aunque la forma integral de la ley de Gauss puede parecer complicada, es totalmente comprensible si se tienen en cuenta los términos de uno en uno. Eso es exactamente lo que encontrará enseguida, empezando por \vec{E} , el campo eléctrico.

Para entender la ley de Gauss, primero hay que entender el concepto de campo eléctrico. En algunos libros de física e ingeniería, no se da una definición directa del campo eléctrico; en su lugar encontrará una declaración de que un campo eléctrico es "algo que existe" en cualquier región en la que las fuerzas eléctricas actúan. Pero ¿qué es exactamente un campo eléctrico?

Esta pregunta tiene un profundo significado filosófico, pero no es fácil de responder. Fue Michael Faraday quien primero se refirió a un "campo eléctrico de fuerza", y James Clerk Maxwell identificó ese campo como el espacio alrededor de un objeto electrificado - un espacio en el que las fuerzas eléctricas actúan.

El hilo conductor de la mayoría de los intentos de definir el campo eléctrico es que los campos y las fuerzas están estrechamente relacionados. Así que aquí está una definición muy pragmática: un campo eléctrico es la fuerza eléctrica por unidad de carga ejercida sobre un objeto cargado. Aunque los filósofos debaten sobre el verdadero significado del campo eléctrico, pueden resolverse muchos problemas prácticos por el pensamiento de que el campo eléctrico en cualquier lugar es el número de newtons de fuerza eléctrica ejercida sobre cada coulomb de carga en ese lugar. Por lo tanto, el campo eléctrico puede ser definido por la relación:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad \text{Ec. 4.1}$$

Donde \vec{F}_e es la fuerza eléctrica sobre una carga pequeña o puntual. Esta definición deja en claro dos características importantes del campo eléctrico:

- (1) \vec{E} es una magnitud vectorial con magnitud directamente proporcional a la fuerza y con la dirección dada por la dirección de la fuerza sobre una carga de prueba positiva.
- (2) \vec{E} tiene unidades de newtons por coulomb (N / C), que son las mismas que voltios por metro (V / m), ya que volts=newtons · metros / coulombs.

En la aplicación de la ley de Gauss, a menudo es útil poder visualizar el campo eléctrico en la proximidad de un objeto cargado. El más común de los enfoques para la construcción de una representación visual de un campo eléctrico es usar ya sea flechas o líneas de campo que apuntan en la dirección del campo en cada punto en el espacio. En el enfoque de la flecha, la fuerza del campo está indicada por la longitud de la flecha, mientras que en el enfoque de línea de campo, es la separación de las líneas que le indica la intensidad de campo (con líneas más estrechas que significan un campo más fuerte). Cuando nos fijamos en un dibujo de líneas de campo eléctrico o flechas, asegúrese de recordar que existe el campo entre las líneas también.

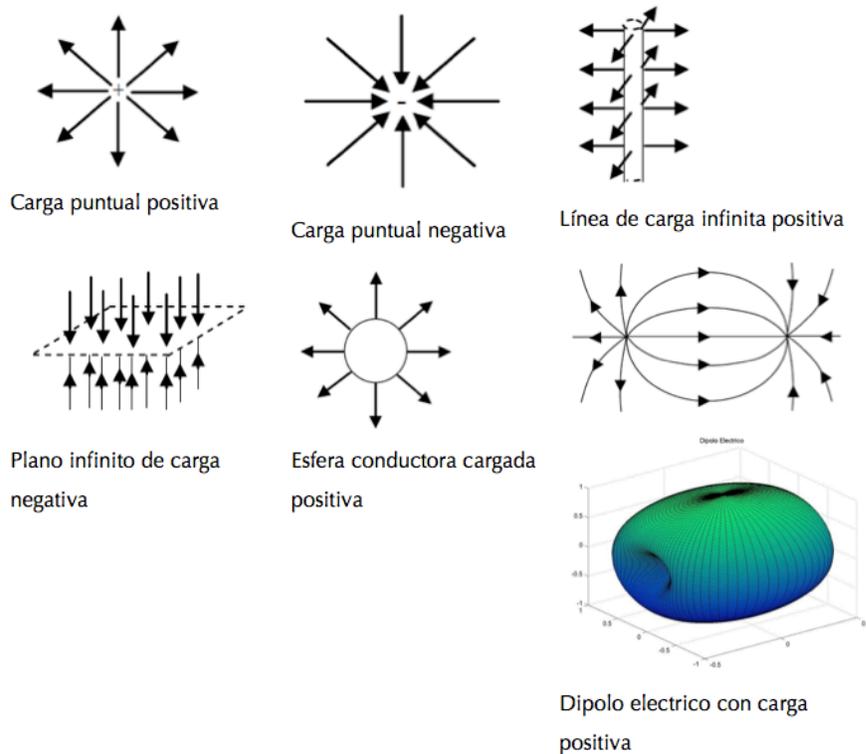


Figura 4.1 Ejemplos de campos eléctricos. Recuerde que existen estos campos en tres dimensiones; visualizaciones completas tridimensionales (3-D) están disponibles en el sitio web del libro.

Ejemplo de varios campos eléctricos pertinentes para la aplicación de la ley de Gauss, se muestran en la Figura 4.1. Aquí hay algunas reglas generales que le ayudarán a visualizar y esbozar los campos eléctricos producidos por cargas (también hay los formados por la dinámica de cambios de un campo magnético):

- Líneas de campo eléctrico deberán ser originadas de carga positiva y terminar carga negativa.
- El campo eléctrico neto en cualquier punto es la suma vectorial de todos los campos eléctricos presentes en ese punto.

- Las líneas de un mismo campo eléctrico nunca pueden cruzarse, ya que indicaría que los puntos de campo poseen dos direcciones diferentes en el mismo lugar (si dos o más diferentes fuentes contribuyen campos eléctricos que apuntan en direcciones diferentes en el mismo lugar, el campo eléctrico total es la suma vectorial de los campos individuales, y las líneas de campo eléctrico siempre apuntan en la dirección única del campo total).

Las ecuaciones para el campo eléctrico en las proximidades de algunos objetos simples se pueden encontrar con ecuaciones de la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Ecuaciones de campo eléctrico en objetos simples

Carga puntual (carga=q) a una distancia r de q	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$
Esfera conductora (carga neta = Q) Distancia r del centro.	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ fuera $\vec{E} = 0$ dentro
Esfera aislante uniformemente cargada. Distancia r del centro.	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ fuera $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{r^2} \hat{r}$ dentro
Carga de línea infinita (densidad de carga lineal= λ) Distancia r del centro, dentro.	$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}$
Superficie plana infinita (densidad de carga superficial= σ)	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$

Entonces, ¿qué representa el \vec{E} en la ley de Gauss? Representa el campo eléctrico total en cada punto de la superficie bajo consideración. La superficie puede ser real o imaginaria, como se verá cuando lea acerca del significado de la integral de superficie en la ley de Gauss. Pero primero usted debe considerar el producto escalar y la unidad normal que aparece dentro de la integral.

Producto interno °

Cuando usted está tratando con una ecuación que contiene un símbolo de multiplicación (un círculo o una cruz), es una buena idea examinar los términos de ambos lados de ese símbolo. Si están impresos en negrita o están usando sombreros vector (como lo son \vec{E} y \hat{n} en la ley de Gauss), la ecuación implica multiplicación vectorial, y hay varias maneras diferentes para multiplicar vectores (cantidades que tienen magnitud y dirección) .

En la ley de Gauss, el círculo entre \vec{E} y \hat{n} representa el producto interno (o producto escalar) entre el vector campo eléctrico \vec{E} y el vector normal unitario \hat{n} . Si conoces los componentes cartesianos de cada vector, se puede calcular esto como:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \text{Ec. 4.2}$$

O, si se conoce el ángulo entre los vectores, puede utilizar

$$\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad \text{Ec. 4.3}$$

donde $|\vec{A}|$ y $|\vec{B}|$ representan la magnitud (longitud) de los vectores. Observe que el producto escalar entre dos vectores da un resultado escalar.

Vector unitario normal \hat{n}

El concepto de vector normal unidad es sencillo; en cualquier punto de una superficie, imagine un vector con longitud uno apuntando en la dirección perpendicular a la superficie. Tal vector \hat{n} , se

llama vector unitario normal porque su longitud es la unidad y es normal, o perpendicular a la superficie. La unidad normal para una superficie plana se muestra en la **Figura 4.2 (a)**.

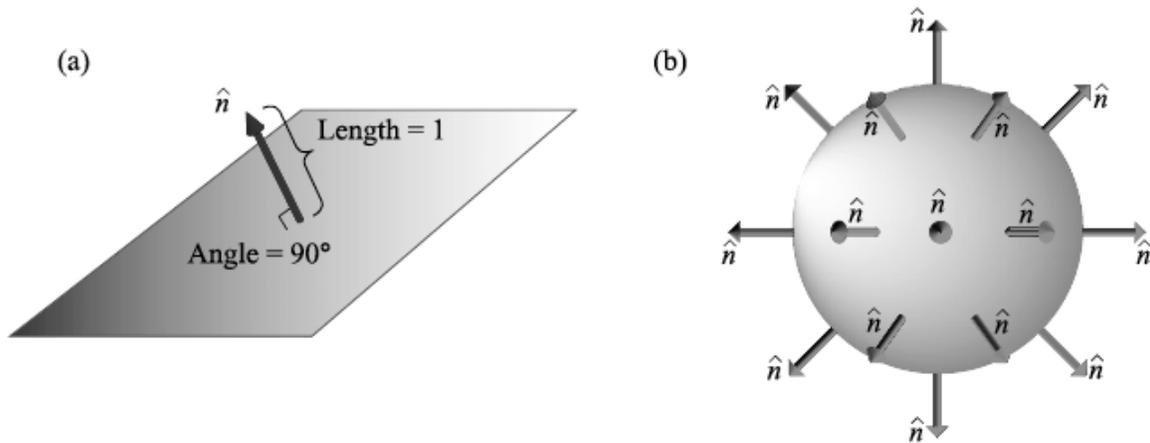


Figura 4.2 Vector normal unitario a un plano y a una superficie esférica.

Ciertamente, se podría haber elegido el vector unitario para el plano de la **Figura 4.2 (a)** apuntan en la dirección opuesta -no hay diferencia fundamental entre un lado de una superficie abierta y el otro- recordemos que una superficie abierta es cualquier superficie para la que es posible ir de un lado a otro sin tener que pasar a través de la superficie.

Para una superficie cerrada (que se define como una superficie que divide el espacio en un dentro y un fuera), la ambigüedad en la dirección de la unidad normal se ha resuelto. Por convención, se toma el vector normal como unidad para una superficie cerrada para que apunte hacia el exterior -lejos del volumen encerrado por la superficie-.

Usted debe ser consciente de que algunos autores utilizan la notación $d\vec{a}$ un lugar de $\hat{n} da$. En esa notación, la unidad normal se incorpora en la zona vector elemento $d\vec{a}$, que tiene magnitud igual al área da y dirección a lo largo de la superficie normal \hat{n} . Así que $d\vec{a}$ y $\hat{n} da$ tienen el mismo propósito.

4.1.1 El componente de \vec{E} normal a una superficie $\vec{E} \cdot \hat{n}$

Si usted entiende el producto escalar y el vector unitario normal, el significado de $\vec{E} \circ \hat{n}$ debe ser claro; esta expresión representa el componente del vector de campo eléctrico que es perpendicular a la superficie bajo consideración.

Si el razonamiento detrás de esta afirmación no es evidente para usted, recordar que el producto escalar entre dos vectores tales como \vec{E} y \hat{n} es simplemente la proyección de la primera a la segunda multiplicado por la longitud de la segunda. Recordemos también que, por definición, la longitud de la unidad normal es uno $|\hat{n}| = 1$ de modo que

$$\vec{E} \circ \hat{n} = |\vec{E}| |\hat{n}| \cos \theta = |\vec{E}| \cos \theta \quad \text{Ec. 4.4}$$

donde θ es el ángulo entre la normal unitaria \hat{n} y \vec{E} . Este es el componente del vector de campo eléctrico perpendicular a la superficie, como se ilustra en la **Figura 4.2**.

Por lo tanto, si $\theta = 90^\circ$, \vec{E} es perpendicular a \hat{n} , lo que significa que el campo eléctrico es paralelo a la superficie, y $\vec{E} \circ \hat{n} = |\vec{E}| \cos 90^\circ = 0$. Por lo tanto, en este caso el componente de \vec{E} perpendicular a la superficie es cero.

A la inversa, si $\theta = 0^\circ$, \vec{E} es paralela a \hat{n} , es decir, el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, y $\vec{E} \circ \hat{n} = |\vec{E}| \cos 0^\circ = |\vec{E}|$. En este caso, el componente perpendicular a la superficie es toda la longitud de \vec{E} .

La importancia del componente de campo eléctrico perpendicular a la superficie se hará evidente si tenemos en cuenta el flujo eléctrico. Para hacer eso, usted debe asegurarse de que entiende el significado de la integral de superficie en la ley de Gauss.

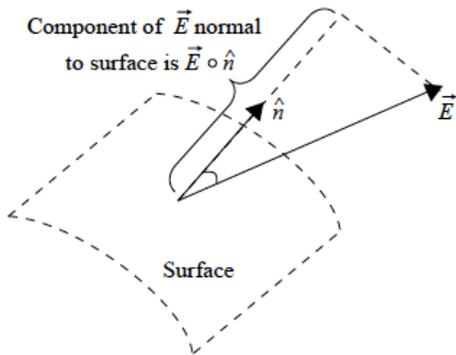


Figura 4.3 Proyección de \vec{E} sobre la dirección de \hat{n} .

4.1.2 La superficie integral $\int_S () da$

Muchas ecuaciones de la física y la ingeniería - la ley de Gauss entre ellas - implican el área integral de una función escalar o campo vectorial sobre una superficie especificada (este tipo de integral es también llamada integral de superficie). El tiempo que dedica a la comprensión de esta importante operación matemática se amortizará muchas veces cuando trabajas problemas de mecánica, dinámica de fluidos, y la electricidad y magnetismo.

El significado de la integral de superficie puede entenderse considerando una superficie delgada tal como la mostrada en la **Figura 4.4**. Imagine que la densidad de área (la masa por unidad de superficie) de esta superficie varía con \mathbf{x} y \mathbf{y} , y desea determinar la masa total de la superficie. Usted puede hacer esto al dividir la superficie en segmentos de dos dimensiones sobre cada una de las cuales la densidad de área es aproximadamente constante.

Para los segmentos individuales con densidad de área σ_i y el área dA_i , la masa de cada segmento es $\sigma_i dA_i$, y la masa de toda la superficie de los segmentos de N está dada por $\sum \sigma_i dA_i$. Como se podrá imaginar, con los segmentos más pequeños de área, más se acerca a la verdadera masa, ya que su aproximación de la constante σ es más precisa para los segmentos más pequeños. Si deja

que el área del segmento dA se aproxime a cero y N se aproxime a infinito, la suma se convierte en la integración, y tenemos que

$$Masa = \int_S (\sigma(x,y)) da$$

Esta es el área integral de la función escalar $\sigma(x,y)$ sobre la superficie S . Es simplemente una manera de sumar las contribuciones de pequeñas piezas de una función (la densidad en este caso) para encontrar una cantidad total. Para entender la forma integral de la ley de Gauss, es necesario ampliar el concepto de la integral de superficie a los campos vectoriales, y ese es el tema siguiente.

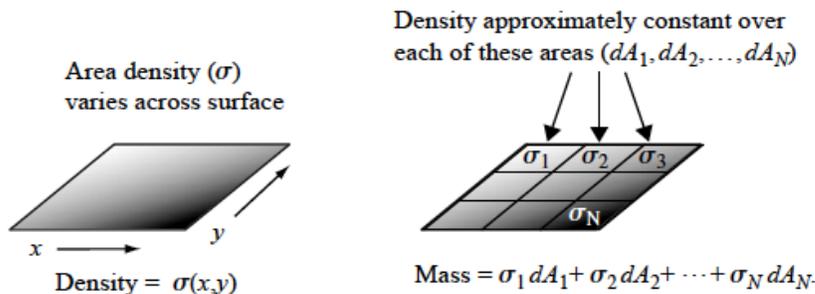


Figura 4.4 Encontrar la masa de una superficie de densidad variable.

4.1.3 El flujo de un campo vectorial $\int_S (\vec{A} \cdot \hat{n}) da$

En la ley de Gauss, la integral de superficie no se aplica a una función escalar (tales como la densidad de una superficie) sino a un campo vectorial. ¿Qué es un campo vectorial? Como su nombre indica, un campo vectorial es una distribución de cantidades en el espacio - un campo - y estas cantidades tienen magnitud y dirección, lo que significa que son vectores. Así que mientras que la distribución de la temperatura en una habitación es un ejemplo de un campo escalar, la velocidad y la dirección del flujo de un fluido en cada punto en una corriente es un ejemplo de un campo vectorial.

La analogía del flujo de un líquido es muy útil para comprender el significado de "flujo de un campo vectorial", incluso cuando el vector campo es estático y nada está realmente fluyendo. Se puede pensar en el flujo de un campo vectorial sobre una superficie como la "cantidad" de ese campo que "fluye" a través de esa superficie, como se ilustra en la **Figura 4.5**.

En el caso más simple de un campo vectorial uniforme \vec{A} y una superficie S perpendicular a la dirección del campo, el flujo ϕ es definido como el producto de la magnitud del campo y el área de la superficie:

$$\phi = |\vec{A}| \times \text{área superficie}$$

Este caso se ilustra en la **Figura 4.5(a)**. Tenga en cuenta que si \vec{A} es perpendicular a la superficie, es paralela al vector unitario normal \hat{n} :

$$\phi = \vec{A} \cdot \hat{n} \times \text{área superficie}$$

Mientras los campos uniformes y las superficies planas son muy útiles para entender el concepto de flujo, muchos problemas electromagnéticos implican campos no uniformes y superficies curvas. Para esos tipos de problemas, necesitará comprender cómo extender el concepto de integral de superficie de campos vectoriales.

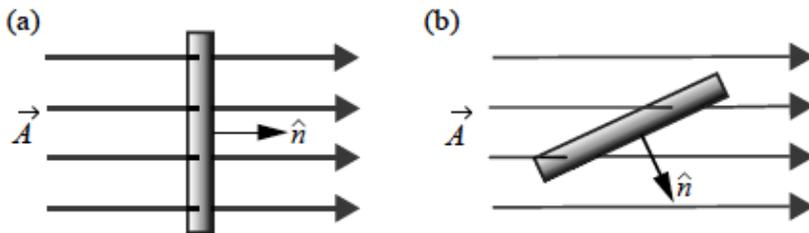


Figura 4.5 Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

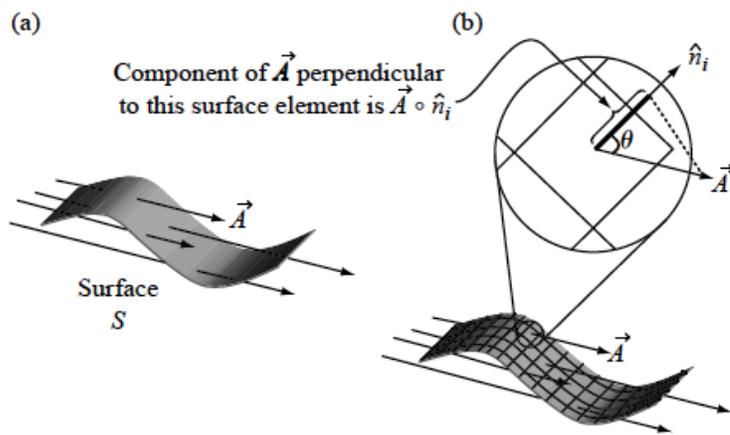


Figura 4.6 Componente perpendicular de \vec{A} a la superficie.

Considere una superficie curvada y un campo vectorial \vec{A} que se muestra en la **Figura 4.6(a)**. Imagine que \vec{A} representa el flujo de un fluido real que pasa por una membrana porosa; más tarde se verá cómo esto se aplica al flujo de un campo eléctrico a través de una superficie que puede ser real o puramente imaginaria.

Antes de continuar, usted debe detenerse a pensar un momento sobre cómo puede medir sobre la búsqueda de la tasa del flujo material a través de la superficie S . Usted puede definir "caudal o flujo" en algunas formas diferentes, pero le ayudará a enmarcar la cuestión como "cuántas partículas pasan a través de la membrana por cada segundo".

Para responder a esto, debemos definir \vec{A} como un número con la densidad del líquido (partículas por metro cúbico) por la velocidad del flujo (metros por segundo). Como el producto del número de densidad (un escalar) y la velocidad (vector), \vec{A} debe ser un vector en la misma dirección que la velocidad, con unidades de partículas por metro cuadrado por segundo. Ya que está intentando encontrar el número de partículas por cada segundo que pasa a través de la superficie, el análisis dimensional sugiere que usted multiplique \vec{A} por el área de la superficie.

Pero veamos de nuevo la **Figura 4.6(a)**. Las diferentes longitudes de las flechas están pensadas para sugerir que el flujo material no es espacialmente uniforme, lo que significa que la velocidad

puede ser mayor o menor en distintas ubicaciones dentro del flujo. Este hecho por sí solo significaría que el material fluye a través de algunas porciones de la superficie a un ritmo superior al de otras partes, pero también se debe tener en cuenta el ángulo de la superficie de la dirección del flujo. Cualquier porción de la superficie precisamente en la dirección del flujo tendrán necesariamente cero partículas por segundo que pasan por ella, ya que las líneas de flujo deben penetrar la superficie para transportar las partículas de un lado a otro. Por lo tanto, usted debe preocuparse no sólo por la velocidad del flujo y el área de cada porción de la membrana, sino también con el componente del flujo perpendicular a la superficie.

Por supuesto, usted sabe cómo encontrar el componente de \vec{A} una perpendicular a la superficie; simplemente el producto **dot** de entre \vec{A} y \hat{n} , la unidad normal a la superficie. Pero ya que la superficie es curva, la dirección depende de qué parte de la superficie se esté considerando. Para tratar los diferentes \hat{n} (y \vec{A}) en cada ubicación, debemos dividir la superficie en pequeños segmentos, como se muestra en la **Figura 4.6(b)**. Si se realizan estos segmentos suficientemente pequeños, se puede suponer que ambos \vec{A} y \hat{n} son constantes a lo largo de cada segmento.

Que \hat{n}_i representan la unidad normal para el segmento i ésimo de la superficie (del área da_i); el flujo a través del segmento i es $(\vec{A}_i \circ \hat{n}_i) da_i$, el total es el flujo a través de toda la superficie:

$$\sum_i (\vec{A}_i \circ \hat{n}_i) da_i$$

No debe sorprender que si ahora el tamaño de cada segmento tiende a cero, la suma se convierte en la integración del flujo a través de toda la superficie:

$$\int_s (\vec{A} \circ \hat{n}) da$$

Para una superficie cerrada, el símbolo de la integral incluye un círculo:

$$\oint_s (\vec{A} \circ \hat{n}) da$$

Este flujo es el flujo de partículas a través de una superficie cerrada S , y la similitud en el lado izquierdo con la ley de Gauss es sorprendente. Sólo tiene que sustituir el campo vectorial \vec{A} con el campo eléctrico \vec{E} , lo que hace las expresiones idénticas.

4.1.4 El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada

Sobre la base de los resultados de la sección anterior, usted debe comprender que el flujo ϕ_E de campo vectorial \vec{E} a través de la superficie S se puede determinar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\phi_E = |\vec{E}| \times (\text{área superficie})$$

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \hat{n} \times (\text{área superficie})$$

Donde \vec{E} es uniforme y perpendicular a S

$$\phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) da$$

donde \vec{E} es no uniforme y está en ángulo variable con S

Estas relaciones indican que el flujo eléctrico es una cantidad escalar y tiene unidades de campo eléctrico o Vm. Pero la analogía utilizada en la sección anterior significa que el flujo eléctrico debe ser pensado como un flujo de partículas y, ¿el campo eléctrico es el producto de una densidad y velocidad?

La respuesta a esta pregunta es "absoluta". Recuerde que cuando usted emplea una analogía física, está esperando aprender algo acerca de las relaciones entre las cantidades, no acerca de las cantidades que ellas mismas son.

Así, puede encontrar el flujo eléctrico integrando el componente normal del campo eléctrico sobre una superficie, pero usted no debe pensar en el flujo eléctrico como el movimiento físico de las partículas.

¿Cómo debe pensar el flujo eléctrico? Un enfoque útil se deriva directamente de la utilización de las líneas de campo para representar el campo eléctrico. Recordar que tales representaciones de la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto indicado por el espaciado de las líneas de campo en esa ubicación. Más específicamente, la intensidad del campo eléctrico puede considerarse proporcional a la densidad de líneas de campo (el número de líneas de campo por

metro cuadrado) en un plano perpendicular al campo en el punto bajo consideración. La integración de esa densidad en toda la superficie da el número de líneas de campo que penetran en la superficie y eso es exactamente lo que es la expresión de flujo eléctrico. Por lo tanto, otra manera de definir el flujo eléctrico es

$\phi_E =$ número de líneas de campo que penetran una superficie.

Hay dos advertencias que usted debe mantener en mente cuando piensa el flujo eléctrico como el número de líneas de campo eléctrico penetrando una superficie. La primera es que las líneas de campo son solo una representación adecuada del campo eléctrico, que es continuo en el espacio. El número de líneas de campo que usted elija para dibujar un campo dado, siempre y cuando se mantenga consistente entre campos de diferentes intensidades, lo que significa que los campos que son dos veces más fuertes deben estar representados por dos veces más líneas de campo por unidad de área.

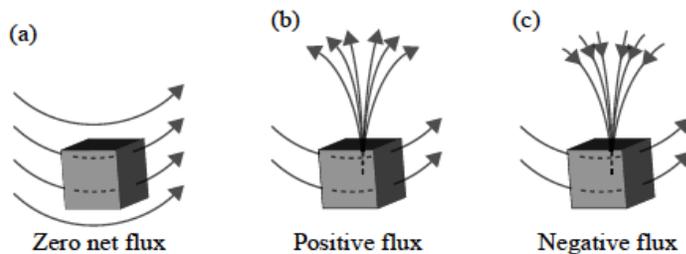


Figura 4.7 Líneas de flujo penetrando superficies cerradas.

La segunda advertencia es que la penetración de la superficie es un camino de dos vías; una vez que la dirección de una superficie normal \hat{n} ha sido establecida, los componentes de la línea de campo paralelo a esa dirección dan un flujo positivo, mientras que los componentes en la dirección opuesta (antiparalelo a) dan un flujo negativo. Así, una superficie penetrada por cinco líneas de campo en una dirección (es decir, desde la parte superior a la parte inferior) y cinco líneas de campo en el sentido opuesto (de abajo a arriba) tiene cero flujo, porque las contribuciones de los dos grupos de líneas de campo se cancelan. Por lo tanto, usted debe pensar el flujo eléctrico como el número neto de líneas de campo que penetran en la superficie, tomando en cuenta la dirección de penetración.

Si reflexionamos sobre este último punto, se puede llegar a una conclusión importante sobre superficies cerradas. Considerar los tres cuadros como se muestran en la **Figura 4.7**. El cuadro en la **Figura 4.7(a)** está penetrado solo por líneas de campo eléctrico que se originan y terminan en el exterior de la caja. Por lo tanto, cada línea del campo que entra debe salir, y el flujo a través de la caja debe ser cero.

Recordando que la unidad normal para superficies cerradas son puntos fuera de los volúmenes cerrados, puede ver que las líneas de flujo hacia adentro (entrando en el recuadro) es negativo, pues $\vec{E} \circ \hat{n}$ debe ser negativo cuando el ángulo entre \vec{E} y \hat{n} es mayor que 90° . Precisamente esta es cancelada por el flujo hacia fuera (líneas que salen de la caja), lo cual es positivo, ya que $\vec{E} \circ \hat{n}$ es positivo cuando el ángulo entre \vec{E} y \hat{n} es inferior a 90° .

Ahora considere el cuadro en la **Figura 4.7(b)**. Las superficies de este cuadro son penetradas no sólo por las líneas de campo originadas fuera de la caja, sino también por un grupo de líneas de campo que se originan dentro de la caja. En este caso, el número neto de líneas de campo, claramente no es cero, puesto que el flujo positivo de la líneas que se originan en el cuadro no es compensado por otros cualquier flujo entrante (negativo). Por lo tanto, se puede decir con certeza que si el flujo a través de cualquier superficie cerrada es positiva, la superficie debe contener una fuente de líneas de campo.

Por último, consideremos el cuadro en la **Figura 4.7(c)**. En este caso, algunas de las líneas de campo terminan dentro del cuadro. Estas líneas proporcionan un flujo negativo en la superficie a través de la cual ingresan, y puesto que no salen de la caja, su contribución al flujo neto no es compensado por ningún flujo positivo.

Evidentemente, si el flujo a través de una superficie cerrada es negativo, esta superficie debe contener un sumidero de las líneas de campo (algunas veces referido como un drenaje).

Ahora recuerde la regla del pulgar para cargas en el dibujo de líneas de campo eléctrico inducido; deben provenir de carga positiva y terminan en una carga negativa. Así, el punto a partir del

campo del cual las líneas divergen en la **Figura 4.7(b)** marca la ubicación de alguna cantidad de carga positiva, y el punto en el que las líneas de campo convergen en la **Figura 4.7(c)** indica la existencia de una carga negativa en esa ubicación.

Si la cantidad de carga en esos lugares fuera mayor, habría más líneas de campo comenzando o terminando en esos puntos, y el flujo a través de la superficie sería mayor. Y si existen cantidades iguales positivas y negativas de la carga dentro de uno de estos cuadros, la positiva (carga hacia afuera) produciendo flujo de carga positiva el cual sería cancelado por la negativa (carga hacia adentro), flujo producido por la carga negativa. Así, en este caso el flujo sería cero, al igual que la carga neta contenida dentro de la caja sería cero.

Ahora deberíamos ver el razonamiento físico detrás de la ley de Gauss: el flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie cerrada, es decir, el número de líneas de campo eléctrico penetrante por superficie, debe ser proporcional a la carga total contenida en dicha superficie. Antes de poner este concepto en práctica, debemos echar un vistazo al lado derecho de la ley de Gauss.

4.1.4.1 La carga encerrada

Si usted entiende el concepto de flujo tal como se describe en la sección anterior, debe quedar claro por qué el lado derecho de la ley de Gauss implica únicamente la carga cerrada, es decir, la carga dentro de la superficie cerrada sobre los cuales el flujo es determinado. Sencillamente, es porque cualquier carga que se encuentra fuera de la superficie produce una cantidad igual de flujo (negativo) hacia adentro y hacia afuera (flujo positivo), por lo que la contribución neta para el flujo a través de la superficie debe ser cero.

¿Cómo se puede determinar la carga encerrada por una superficie?, para algunos problemas, somos libres de elegir una superficie que rodea una cantidad conocida de la carga, como en las situaciones que se muestran en la **Figura 4.8**. En cada uno de estos casos, la carga total dentro de la superficie seleccionada puede determinarse fácilmente a partir de consideraciones geométricas.

Para problemas relacionados con grupos de cargas discretas encerrados por superficies de cualquier forma, encontrar que la carga total es simplemente una cuestión de añadir las cargas individuales.

La carga total encerrada es igual a:

$$\sum_i q_i$$

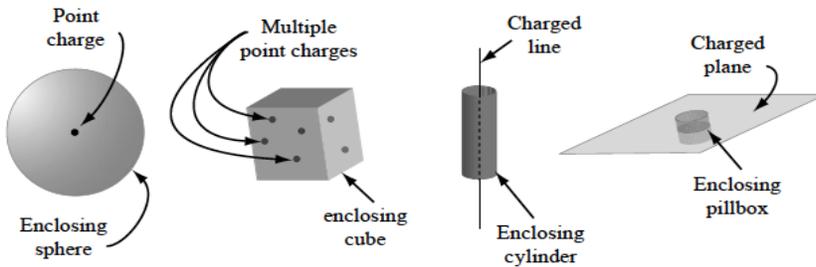


Figura 4.8 Superficie encerrada que contiene cargas.

Mientras que un pequeño número de cargas discretas pueden aparecer en la física y en los problemas de ingeniería, en el mundo real esto está muy lejos, lo más probable es encontrar objetos cargados con miles de millones de portadores de carga a lo largo de un cable forrado, sobre una superficie, o agrupadas a lo largo de un volumen. En tales casos, contando las cargas individuales no es práctico, pero puede determinar la carga total si se conoce la densidad de carga. La densidad de carga puede ser especificada en una, dos o tres dimensiones (1-, 2- o 3-D).

Dimensiones	Terminología	Símbolo	Unidades
1	Densidad de carga lineal	λ	C/m
2	Densidad de carga de área	σ	C/m ²
3	Densidad de Carga de volumen	ρ	C/m ³

Si estas cantidades son constantes en toda la longitud, área, volumen bajo consideración, encontrando la carga cerrada solo requiere una sola multiplicación:

1D	$q_{enc} = \lambda L$	L es la longitud encerrada de línea de carga
2D	$q_{enc} = \lambda A$	A es el área encerrada de la superficie de carga
3D	$q_{enc} = \lambda \rho$	P es la porción encerrada de volumen de carga

Para nosotros también es probable que deseemos encontrar situaciones en las que la densidad de carga no es constante a lo largo de la línea, de superficie o de volumen de interés. En tales casos, la integración es la técnica descrita en la superficial de 'Integral'. Así

1D	$q_{enc} = \int_L \lambda dl$	Donde λ varia con la longitud
2D	$q_{enc} = \int_S \sigma da$	Donde σ varia con la superficie
3D	$q_{enc} = \int_V \rho dV$	Donde ρ varia con el volumen

Usted debe tener en cuenta que la mencionada carga en la ley de Gauss para campos eléctricos es la carga total, incluyendo tanto libre de carga y consolidada. Usted puede leer acerca de la carga

dependiente en la sección siguiente, y usted encontrará una versión de la ley de Gauss que solo depende de la carga libre.

Una vez que haya determinado la carga encerrada por una superficie de cualquier tamaño y forma, es muy fácil encontrar el flujo a través de esa superficie; simplemente divide la carga encerrada por ϵ_0 , la permitividad del espacio libre. El significado físico de ese parámetro se describe en la siguiente sección.

4.1.5 La permeabilidad del espacio libre

La constante de proporcionalidad entre el flujo eléctrico en el lado izquierdo de la ley de Gauss y la carga cerrada en el lado derecho es ϵ_0 , la permitividad del espacio libre. La permitividad de un material determina su respuesta a una aplicación de un campo eléctrico, en material no conductor (llamados "aisladores" o "dieléctricos"), las cargas no se mueven libremente, pero pueden ser ligeramente desplazadas de su posición de equilibrio. La permitividad pertinente en la ley de Gauss para campos eléctricos es la permitividad del espacio libre (o "permitividad vacío"), que es la razón por la que lleva el subíndice cero.

El valor de la permitividad en el vacío en unidades SI es de aproximadamente $8,85 \times 10^{-12}$ culombios por volt-metro (C/Vm); a veces se las unidades de permitividad son dadas como faradios por metro (F/m) o, más fundamentalmente, ($C^2 s^2 / kg m^3$). Un valor más preciso de la permitividad del espacio libre es

$$\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12} C / Vm$$

¿La presencia de esta cantidad significa que la forma de la ley de Gauss es válida solo en un vacío? No, la ley de Gauss, como está escrito en este capítulo en general, y se aplica a los campos eléctricos dentro de dieléctricos así como en espacio libre, la condición cuenta para todas las cargas encerradas, incluidas las cargas que están enlazadas a los átomos del material.

El efecto de cargas enlazadas puede entenderse teniendo en cuenta lo que ocurre cuando se coloca un dieléctrico en un campo eléctrico externo. En el interior del material dieléctrico, la amplitud del campo eléctrico total es generalmente inferior a la amplitud del campo aplicado.

La razón de esto es que los dieléctricos convertidos en "polarizados" cuando se colocan en un campo eléctrico, lo que significa que las cargas positivas y negativas son desplazadas de sus posiciones originales. Y dado que las cargas positivas son desplazadas en una dirección (paralela a la aplicación de un campo eléctrico) y cargas negativas están desplazadas en el sentido opuesto (antiparalelo al campo aplicado), estas cargas desplazadas generan su propio campo eléctrico que se opone al campo externo, como se muestra en la **Figura 4.9**.

Esto hace que el campo neto dentro del dieléctrico, sea inferior al campo externo. Es la habilidad de los materiales dieléctricos para reducir la amplitud de un campo eléctrico que conduce a su aplicación más común: el aumento de la capacitancia y la tensión máxima de funcionamiento de los condensadores. Como ustedes recordarán, la capacitancia (capacidad de almacenar carga) de un capacitor de placas paralelas es

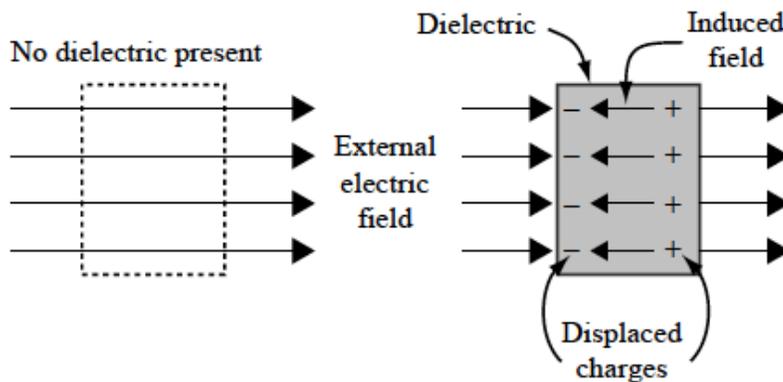


Figura 4.9 Campo eléctrico inducido en un dieléctrico.

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Donde **A** es el área de las placas, **d** la distancia de separación de las placas y ϵ es la permitividad del material entre las placas. Materiales con alta permitividad proporcionan mayor capacitancia sin requerir mayor área de placa o espacio entre las mismas. La permitividad de un

dieléctrico a menudo se expresa como la permitividad relativa, que es el factor por el que la permitividad del material supera a la del espacio libre:

Permitividad relativa es

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$$

Algunos textos se refieren a la permitividad relativa como "dieléctrica constante", a pesar de la variación de la permitividad con la frecuencia, que sugiere que la palabra "constante" es mejor utilizada en otros lugares. La permitividad relativa del hielo, por ejemplo, cambia aproximadamente 81 a frecuencias por debajo de 1 kHz, a menos de 5 en frecuencias por encima de 1MHz. Más a menudo, a baja frecuencia el valor de permitividad se llama constante dieléctrica.

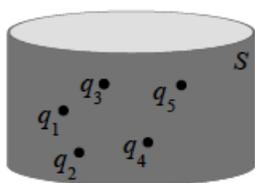
Una nota más sobre permitividad; la permitividad de un medio es un parámetro fundamental para determinar la velocidad con la que una onda electromagnética se propaga a través de ese medio.

4.1.5.1 Aplicaciones de la Ley de Gauss en su forma integral

Una buena prueba de la comprensión de una ecuación como la ley de Gauss es si somos capaces de resolver problemas aplicando a las situaciones pertinentes. En este punto, usted debe estar convencido de que la ley de Gauss relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada y a la carga encerrada por la superficie. Aquí están algunos ejemplos de lo que se puede hacer con esa información.

Ejemplo 4.1: para cada una de las distribuciones de carga, encontrar el flujo a través de una superficie cerrada en torno a dicha carga.

Problema: Cinco cargas puntuales están encerradas en una superficie cilíndrica S. Si los valores de las cargas son $q_1=+3 \text{ nC}$, $q_2=-2 \text{ nC}$, $q_3=+2 \text{ nC}$, $q_4=+4 \text{ nC}$ y $q_5=-1 \text{ nC}$, encontrar el flujo total a través de S.



Solución a través de la ley de Gauss

$$\phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Para cargas discretas, usted sabe que la carga total es simplemente la suma de las cargas individuales. Así que

$$q_{enc} = \sum_i q_i$$

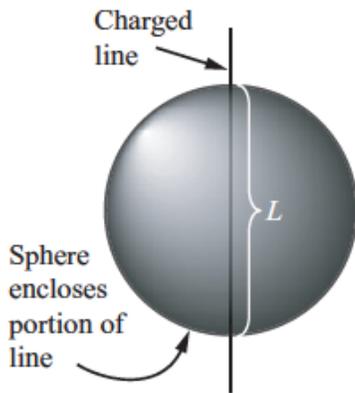
$$q_{enc} = \sum_i q_i = (3 - 2 + 2 + 4 - 1) \times 10^{-9} C = 6 \times 10^{-9} C$$

$$\phi_E = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{6 \times 10^{-9} C}{8.8541878176 \times 10^{-12} C/Vm} = 678 Vm$$

Este es el flujo total a través de cualquier superficie cerrada que rodea a este grupo de Cargas.

Ejemplo 4.2 Dado el flujo a través de una superficie cerrada, encontrar la carga encerrada.

Problema: una línea carga con densidad de carga lineal $\lambda = 10^{-12} C/m$ pasa por el centro de una esfera. Si el flujo a través de la superficie de la esfera es de $1.13 \times 10^{-3} Vm$, ¿cuál es el radio R de la esfera?



Solución: La carga sobre una línea de carga de longitud L está dada por $q = \lambda L$. Así,

$$\phi_E = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$L = \frac{\phi_E \epsilon_0}{\lambda}$$

Desde L es el doble del radio de la esfera, esto significa

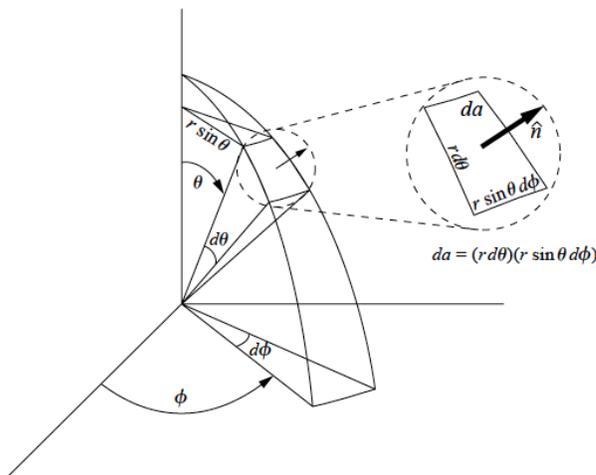
$$2R = \frac{\phi_E \epsilon_0}{\lambda}$$

$$R = \frac{\phi_E \epsilon_0}{2\lambda}$$

Insertar los valores para la ϕ_E , ϵ_0 y λ , usted encontrará que

Ejemplo 4.3 Hallar el flujo a través de una sección de una superficie cerrada.

Problema: Una fuente puntual de carga q se coloca en el centro de curvatura de una sección esférica que se extiende desde el ángulo esférico de θ_1 a θ_2 y ϕ_1 de ϕ_2 a ϕ_3 . Encontrar el flujo eléctrico a través de la sección esférica.



Solución: La superficie de interés, en este problema es abierta, tendrá que encontrar el flujo eléctrico integrando la componente normal del campo eléctrico sobre la superficie. A continuación, puede comprobar su respuesta mediante la ley de Gauss permitiendo la sección esférica para formar una esfera que encierra el punto de carga.

El flujo eléctrico ϕ_E es $\phi_E = \oint_S (\vec{E} \circ \hat{n}) da$, donde S es la sección esférica de interés y \vec{E} es el campo eléctrico en la superficie debido a la carga puntual en el centro de la curvatura, una distancia r desde la sección de interés.

En la **Tabla 4.1**, usted sabe que el campo eléctrico a una distancia r de un punto su carga es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Antes de poder integrar por encima de la superficie de interés, usted tiene que considerar $\vec{E} \circ \hat{n}$ (es decir, usted debe encontrar el componente del campo eléctrico perpendicular a la superficie). Que es trivial en este caso, porque la unidad \hat{n} normal para una sección esférica apunta en la dirección radial hacia afuera (en \hat{r} dirección), como puede verse en la figura. Esto significa que \vec{E} y \hat{n} son paralelos y el flujo está dado por

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \circ \hat{n} da = \int_S |\vec{E}| |\hat{n}| \cos(0^\circ) da = \int_S |\vec{E}| da = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} da$$

Desde que se está integrando en una sección esférica en este caso, la elección lógica para el sistema de coordenadas deben ser esféricas. Esto hace que el elemento área $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ y la superficie se vuelve integral

$$\Phi_E = \int_{\theta} \int_{\phi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta} \sin \theta d\theta \int_{\phi} d\phi,$$

Que se integra fácilmente dando

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)(\phi_2 - \phi_1).$$

Para comprobar este resultado, tomar toda la esfera en la sección

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = \pi$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = 2\pi$$

Esto da como consecuencia:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (1 - (-1)) (2\pi - 0) = \frac{q}{\epsilon_0},$$

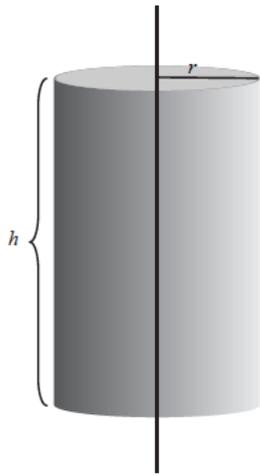
La predicción exacta dada por la Ley de Gauss.

Ejemplo 4.4 \vec{E} está determinado sobre una superficie, encontrar el flujo a través de la superficie y la carga encerrada por la superficie.

Problema: El campo eléctrico a una distancia r de una línea carga infinita con densidad de carga

lineal λ está dada en la **Tabla 1.1** como

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r}$$



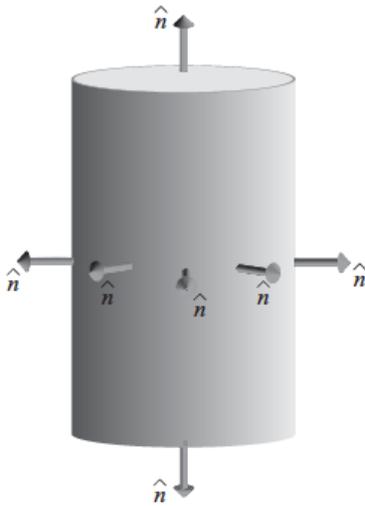
Usar esta expresión para encontrar el flujo eléctrico a través de un cilindro de radio r y altura h que rodea una porción de una línea infinita de carga, y luego usar la ley de Gauss para verificar que la carga adjunta es λh .

Solución: Problemas como estos es mejor abordarlos considerando el flujo a través de cada una de las tres superficies que componen el cilindro: la parte superior, inferior y laterales curvados de superficies. La expresión más general para el flujo eléctrico a través de cualquier superficie

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \circ \hat{n} \, da,$$

Que en este caso da

$$\Phi_E = \int_S \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r} \circ \hat{n} \, da.$$



Consideremos ahora la unidad Vectores normales de cada una de las tres superficies: desde el campo eléctrico apunta radialmente hacia afuera desde el eje del cilindro, \vec{E} es perpendicular a los vectores normales de las superficies superior e inferior y paralelo a los vectores normales para el lado curvo del cilindro. Por lo tanto, puede escribir:

$$\Phi_{E, \text{top}} = \int_S \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r} \circ \hat{n}_{\text{top}} da = 0,$$

$$\Phi_{E, \text{bottom}} = \int_S \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r} \circ \hat{n}_{\text{bottom}} da = 0,$$

$$\Phi_{E, \text{side}} = \int_S \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r} \circ \hat{n}_{\text{side}} da = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \int_S da,$$

Y, puesto que el área del lado curvo del cilindro es $2\pi rh$, esto es

$$\Phi_{E, \text{side}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (2\pi rh) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

La ley de Gauss le dice que esta debe ser igual $\frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$, la cual verifica que la carga adjunta $q_{enc} = \lambda h$ en este caso

Ejemplo 4.5 Dada una distribución de carga simétrica, encontrar \vec{E} .

Encontrar el campo eléctrico mediante la ley de Gauss, puede parecer una tarea desesperada. Después de todo, mientras que el campo eléctrico no aparece en la ecuación, es sólo el componente normal que surge del producto punto, y es solo la parte integrante de ese componente normal en toda la superficie el que es proporcional a la carga encerrada. ¿Existen situaciones realistas en la cual es posible encontrar el campo eléctrico fuera de su posición interior en la ley de Gauss?

Afortunadamente, la respuesta es sí; de hecho, puede encontrar el campo eléctrico mediante la ley de Gauss, aunque sólo en situaciones caracterizadas por una alta simetría. Específicamente, usted puede determinar el campo eléctrico cuando es capaz de diseñar uno real o imaginario con "especial superficie gaussiana" que contenga una cantidad conocida de la carga. Una superficie especial gaussiana es una en que:

- (1) El campo eléctrico es paralelo o perpendicular a la superficie normal (que le permite convertir el producto de punto en una multiplicación algebraica), y
- (2) El campo eléctrico es constante o cero a lo largo de secciones de la superficie (lo que le permite retirar el campo eléctrico de la integral).

Por supuesto, el campo eléctrico en cualquier superficie que se pueda imaginar alrededor de forma arbitraria, las distribuciones de carga no cumplen ninguno de estos requisitos. Pero hay situaciones en las que la distribución de la carga es suficientemente simétrica a una superficie gaussiana especial que puede ser imaginada.

Concretamente, el campo eléctrico en las proximidades de la distribución de la carga esférica, infinitas líneas de carga, e infinitos planos de carga pueden determinarse mediante la aplicación directa de la forma integral de la ley de Gauss. Las geometrías que se aproximan a estas condiciones ideales, o pueden ser aproximadas por combinaciones de ellas, también pueden ser abordadas mediante la ley de Gauss.

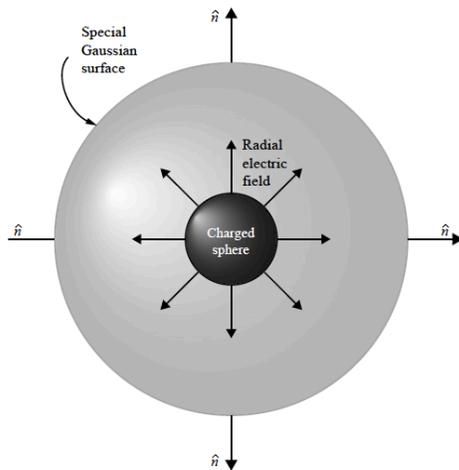
En el problema siguiente se muestra cómo utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico alrededor de una distribución esférica de carga; los otros casos están comprendidos en el conjunto de problemas.

Problema: utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico a una distancia r desde el centro de una esfera con un volumen uniforme de densidad de carga ρ y radio a .

Solución: Considere primero el campo eléctrico fuera de la esfera. Desde la distribución la carga es esférica y simétrica, es razonable esperar que el campo eléctrico sea totalmente radial (es decir, apuntó hacia o fuera de la esfera). Si eso no es obvio para usted, imagine lo que sucedería si el campo eléctrico tiene un componente no radial (digamos en la $\hat{\theta}$ o $\hat{\phi}$ dirección); girando la esfera sobre algunos ejes arbitrarios, se tendría que ser capaz de cambiar la dirección del campo. Pero la carga es distribuida uniformemente en toda la esfera, de modo que no puede haber ninguna dirección preferida u orientación. Si girar la esfera simplemente reemplaza un fragmento de carga con otro idéntico, de manera que esta no pueda tener ningún efecto sobre el campo eléctrico. Frente a este enigma, usted está obligado a concluir que el campo eléctrico de una distribución esférica de carga simétrica debe estar totalmente radial.

Para encontrar el valor de este campo radial utilizando la ley de Gauss, imagine

una superficie que cumpla los requisitos de una superficie gaussiana especial; \vec{E} deben ser paralelas o perpendiculares a la superficie normal en todos los lugares, y \vec{E} debe ser uniforme en toda la superficie. Para un campo eléctrico radial, solo puede haber una elección; su superficie gaussiana debe ser una esfera centrada en la esfera cargada, como se muestra en la figura. Observe que no hay necesidad real de la superficie y la superficie gaussiana especial puede ser puramente imaginaria, es simplemente una construcción que le permite evaluar el producto de punto y quitar el campo eléctrico de la superficie integral en la ley de Gauss.



Desde el campo eléctrico radial todas las partes son paralelas a la normal de la superficie, la $\vec{E} \circ \hat{n}$ plazo en la integral en la ley de Gauss se convierte en $|\vec{E}||\hat{n}|\cos(0^\circ)$, y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana S es

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \circ \hat{n} \, da = \oint_S E \, da$$

debe ser constante a lo largo del **S**, lo cual significa que puede ser eliminado de la integral:

$$\Phi_E = \oint_S E \, da = E \oint_S da = E(4\pi r^2),$$

Donde **r** es el radio de la superficie gaussiana especial. Ahora puede utilizar la ley de Gauss para encontrar el valor de la intensidad de campo eléctrico:

$$\Phi_E = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

Donde es el cargo **q** encerrada por su superficie gaussiana. Puede usar esta expresión para encontrar el campo eléctrico tanto fuera como dentro de la esfera.

Para encontrar el campo eléctrico fuera de la esfera, construir su superficie gaussiana con radio $r > a$ para que toda la esfera cargada se encuentre dentro de la superficie gaussiana. Esto significa que la carga adjunta es solo la densidad de carga de todo el volumen de la esfera cargada:

$$q_{enc} = (4/3)\pi a^3 \rho$$

$$E = \frac{(4/3)\pi a^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Fuera de la esfera.

Para encontrar el campo eléctrico dentro de la esfera cargada, construir su superficie gaussiana con $r < a$. En este caso, la carga adjunta es la densidad de carga en el volumen de su superficie gaussiana:

$$q_{enc} = (4/3)\pi r^3 \rho$$

$$E = \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Dentro de la esfera.

Las claves del éxito es emplear superficies Gaussianas especiales para reconocer la forma adecuada de la superficie y, a continuación, ajustar su tamaño para asegurar que se ejecuta a través del punto en el que desea determinar el campo eléctrico.

4.2 La ley de Gauss en su forma diferencial

La forma integral de la Ley de Gauss para campos eléctricos está relacionada con el flujo eléctrico sobre una superficie que encierra la carga, pero para todas las ecuaciones de Maxwell hay una forma diferencial. Para la Ley de Gauss puede también describirse de manera diferencial como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la forma matemática de la divergencia del campo eléctrico, es decir, la tendencia del campo de flujo de una ubicación específica. El lado derecho de la ecuación es la densidad de carga eléctrica dividida por la permitividad del espacio libre.

El campo eléctrico producido por la carga, diverge si la carga es positiva y converge si la carga es negativa. Esta es la idea principal de la Ley de Gauss en forma diferencial. En otras palabras, los únicos lugares en que la divergencia del campo eléctrico no es cero son en aquellos lugares en que la carga está presente. Si hay una carga positiva, la divergencia es positiva, lo que significa que el campo eléctrico tiende a fluir de ese lugar. Si hay una carga negativa, la divergencia es negativa, y las líneas de campo tienden a fluir hacia ese punto.

Tenga en cuenta que hay una diferencia fundamental entre la forma diferencial e integral de la Ley de Gauss; la forma diferencial se ocupa de la divergencia del campo eléctrico y de la densidad de la carga en los puntos individuales en el espacio, mientras que la forma integral implica la integración de la componente normal del campo eléctrico sobre la superficie. Familiarizarnos con ambas formas permite utilizar la mejor forma para problemas que se intenten resolver.

¿En dónde será útil la Ley de Gauss en su forma diferencial? En cualquier problema que se sabe que la variación espacial del campo vectorial eléctrico en una ubicación específica, puede encontrarse la densidad de carga de volumen en su ubicación utilizando esta forma. Y si se conoce la densidad de carga de volumen, puede determinarse la divergencia del campo eléctrico.

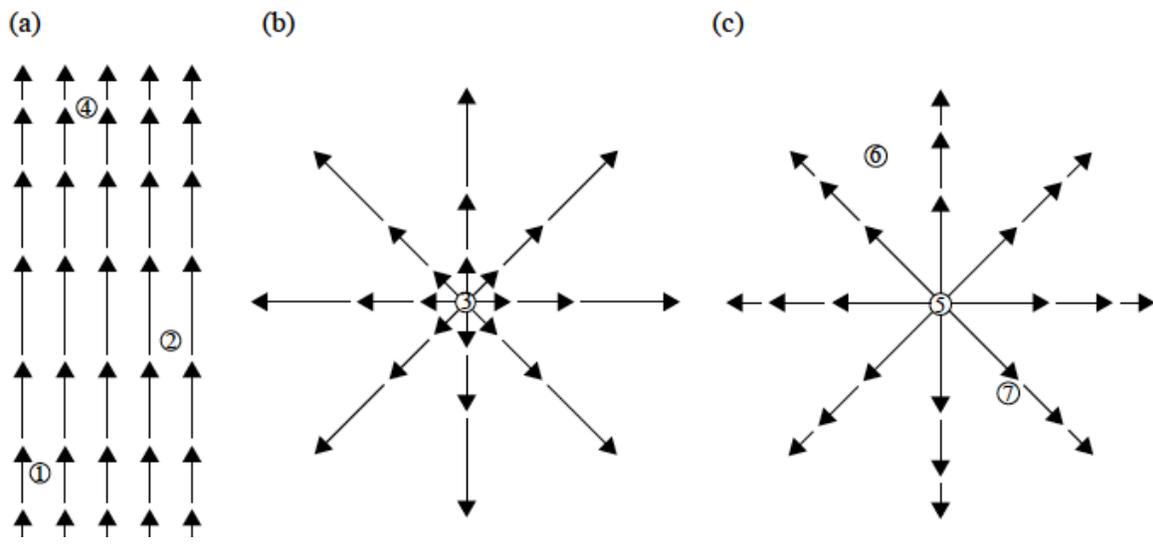
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La expresión derecha de esta ecuación, representa la divergencia del campo eléctrico, en electrostática todas las líneas de campo eléctrico salen de puntos de carga positiva y termina en puntos de carga negativa; así que es comprensible que esta expresión es proporcional a la densidad de carga eléctrica en la situación bajo consideración.

Consideremos el campo eléctrico de una carga positiva puntual; las líneas de campo eléctrico se originan en la carga positiva, y sabemos por la **Tabla 4.1** que el campo eléctrico es radial y

disminuye con $1/r^2$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2} q \hat{r}$$



Campos vectoriales con varios valores divergentes, los lugares 1 y 2 en (a) y 3 en (b) son puntos de divergencia positiva, mientras la divergencia será negativa en el punto 4. El punto 5 es obviamente un punto de divergencia positiva. Pero en los puntos 6 y 7 no está tan claro, las líneas claramente están extendiéndose en esos puntos, pero también están claramente recibiendo menor a mayor distancia desde el centro. ¿Separarse hacia fuera compensa la ralentización del flujo? Así, la divergencia del campo vectorial es simplemente el cambio en su componente x en el eje x , más el cambio en su componente en y en el eje y , más el cambio en su componente en z sobre el eje z . Tenga en cuenta que la divergencia es una cantidad escalar; tiene magnitud pero no dirección. Como las líneas se están extendiendo hacia afuera como en (b), pero en este caso usted podría sospechar que la amplitud decrece del campo vectorial, afectando el valor de la divergencia.

Así que la difusión de las líneas de campo eléctrico son exactamente compensadas por la reducción de $1/r^2$ en la amplitud de campo, y la divergencia del campo eléctrico es cero en todos los puntos de origen. La razón es que en el origen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, no está incluido en el análisis. Para evaluar la divergencia del campo en el origen, debemos utilizar la definición formal de divergencia:

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{E} \circ \hat{n} da$$

Teniendo en cuenta una superficie espacial Gauseana que rodea la carga puntual q , esto es

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \circ \vec{E} &\equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S da \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) \right) \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{q}{\epsilon_0} \right). \end{aligned}$$

Pero, $q/\Delta v$ es simplemente la densidad de carga media sobre el Δv de volumen, y como Δv se reduce a cero, esto se convierte en igual a ρ , la densidad de carga en el origen. Así, en el origen la divergencia es:

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esto satisface la Ley de Gauss. Merece la pena darse el tiempo para asegurarse que Usted entiende la importancia de este último punto. Una mirada casual a las líneas de campos eléctricos en las proximidades de una carga puntual, sugiere que ellos divergen en todas partes (en el sentido de llegar más lejos). Pero como ha visto, los campos vectoriales radiales disminuyen en amplitud con $1/r^2$, realmente divergen en todas partes. El factor clave en la determinación de la divergencia en cualquier punto no es simplemente la distancia entre las líneas de campo y ese punto, pero si el flujo fuera de un volumen infinitamente pequeño alrededor del punto, sería mayor, igual o menor que el flujo en ese volumen. Si el flujo hacia el exterior supera el flujo hacia el interior, la divergencia es positiva en ese punto. Si el flujo hacia el exterior es menor que el flujo hacia el interior, la divergencia es negativa, y si son iguales, hacia fuera y hacia dentro la divergencia es cero en ese punto.

En el caso de una carga puntual en el origen, el flujo a través de esta superficie infinitesimal es distinto de cero, solo si la superficie contiene la carga puntual. Por todas partes, el flujo dentro y fuera de una superficie pequeña debe ser el mismo ya que no contiene carga, y la divergencia del campo eléctrico debe ser cero.

4.3 La ley de Gauss para un campo magnético

La ley de Gauss para campos magnéticos es similar en forma, pero diferente en el contenido de la Ley de Gauss para campos eléctricos. Para los campos eléctricos y magnéticos, la forma integral de la ley de Gauss implica el flujo del campo sobre una superficie cerrada y la forma diferencial especifica la divergencia del campo en un punto.

4.4 La ley de Faraday

En una serie de experimentos efectuados en 1831 por Michael Faraday, demostró que una corriente eléctrica puede ser inducida en un circuito por el cambio del flujo magnético encerrado por el circuito. Este descubrimiento se hace aún más útil cuando se extiende a la declaración general de un campo magnético variante que produce un campo eléctrico. Estos campos eléctricos inducidos son muy diferentes a los campos producidos por cargas eléctricas y la Ley de Faraday de la inducción es la clave para entender su comportamiento.

Referencias

¹ Sánchez, M. J. Manuel (2011), Historia de Matemáticas Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones. Pensamiento matemático. Recuperado de http://www2.camino.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/hamilton_y_el_descubrimiento_de_los_cuaterniones.pdf

² <http://revistasuma.es/IMG/pdf/25/061-070.pdf>

³ A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System (Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press, 1967), xviii + 270 pp;(New York: Dover, 1985; 1994)

⁴ Audrey T. Carpenter (2011) John Theophilus Desaguliers: A Natural Philosopher, Engineer and Freemason in Newtonian England. London: Bloomsbury

⁵ Keithley Joseph F. (1999) The story of electrical and magnetic measurements. New York: IEEE Press [E-book](#)