Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.*)

Von

Hermann Minkowski.

Inhaltsübersicht.

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., Sitzung vom 21. Dezember 1907.

Einleitung.

Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper herrschen zur Zeit noch Meinungsverschiedenheiten. Die Ansätze von Hertz*) (1890) mußten verlassen werden, weil sich herausgestellt hat, daß sie mit verschiedenen experimentellen Ergebnissen in Widerspruch geraten.

1895 publizierte H. A. Lorentz**) seine Theorie der optischen und elektrischen Erscheinungen in bewegten Körpern, die, auf atomistischer Vorstellung von der Elektrizität fußend, durch ihre großen Erfolge die kühnen Hypothesen, von denen sie getragen und durchsetzt wird, zu rechtfertigen scheint. Die Lorentzsche Theorie***) geht aus von gewissen ursprünglichen Gleichungen, die an jedem Punkte des „Äthers" gelten sollen, und gelangt daraus durch Mittelwertsbildungen über „physikalisch unendlich kleine" Bereiche, die schon zahlreiche „Elektronen" enthalten, zu den Gleichungen für die Vorgänge in ponderablen Körpern.

Insbesondere gibt sich die Lorentzsche Theorie Rechenschaft von der Nichtexistenz einer Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther; sie bringt diese Tatsache in Zusammenhang mit einer Kovarianz jener ursprünglichen Gleichungen bei gewissen gleichzeitigen Transformationen der Raum- und Zeitparameter, die von H. Poincaré†) den Namen *Lorentz-Transformationen* erhalten haben. Für jene ursprünglichen Gleichungen ist die Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen eine rein mathematische Tatsache, die ich das *Theorem der Relativität* nennen will; dieses Theorem beruht wesentlich auf der Gestalt der Differentialgleichung für die Fortpflanzung von Wellen mit Lichtgeschwindigkeit.

Nun kann man, ohne noch zu bestimmten Hypothesen über den Zusammenhang von Elektrizität und Materie sich zu bekennen, erwarten, jenes mathematisch evidente Theorem werde seine Konsequenzen so weit erstrecken, daß dadurch auch die noch nicht erkannten Gesetze in bezug auf ponderable Körper irgendwie eine Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen übernehmen werden. Man äußert damit mehr eine Zuversicht, als bereits eine fertige Einsicht, und diese Zuversicht will ich das *Postulat der Relativität* nennen. Die Sachlage ist erst ungefähr eine solche, als wenn man die Erhaltung der Energie postuliert in Fällen, wo die auftretenden Formen der Energie noch nicht erkannt sind.

---

*) Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wiedemanns Ann. 41, p. 369. 1890 (auch in: Ges. Werke Bd. I, p. 256. Leipzig 1892).

**) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

***) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. V 2, Art. 14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.

†) Rend. Circ. Matem. Palermo. t. XXI (1906) p. 129

Gelangt man hernach dazu, die erwartete Kovarianz als einen bestimmten Zusammenhang zwischen lauter beobachtbaren Größen bei bewegten Körpern zu behaupten, so mag alsdann dieser bestimmte Zusammenhang das *Prinzip der Relativität* heißen.

Diese Unterscheidungen scheinen mir nützlich, um den gegenwärtigen Stand der Elektrodynamik bewegter Körper charakterisieren zu können.

H. A. Lorentz hat das Relativitätstheorem gefunden und das Relativitätspostulat geschaffen, als eine Hypothese, daß Elektronen und Materie infolge von Bewegung Kontraktionen nach einem gewissen Gesetze erfahren.

A. Einstein*) hat es bisher am schärfsten zum Ausdruck gebracht, daß dieses *Postulat* nicht eine künstliche Hypothese ist, sondern vielmehr eine durch die Erscheinungen sich aufzwingende neuartige Auffassung des Zeitbegriffs.

Das *Prinzip* der Relativität jedoch in dem von mir gekennzeichneten Sinne ist für die Elektrodynamik bewegter Körper bisher noch gar nicht formuliert worden. *In der gegenwärtigen Abhandlung erhalte ich, indem ich dieses Prinzip formuliere, die Grundgleichungen für bewegte Körper in einer durch dieses Prinzip völlig eindeutig bestimmten Fassung. Dabei wird sich zeigen, daß keine der bisher für diese Gleichungen angenommenen Formen sich diesem Prinzipe genau fügt.*

Man sollte vor allem erwarten, daß die von Lorentz angenommenen Grundgleichungen für bewegte Körper dem Relativitätspostulate entsprächen. Es zeigt sich indes, daß dieses nicht der Fall ist für die allgemeinen Gleichungen, die Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper hat, daß es aber allerdings *approximativ* (unter Vernachlässigung der Quadrate der Geschwindigkeiten der Materie gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit) der Fall ist für diejenigen Gleichungen, die Lorentz hernach für nichtmagnetisierte Körper erschließt; es kommt aber diese spätere Anpassung an das Relativitätspostulat wieder nur dadurch zustande, daß die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins ihrerseits in einer dem Relativitätspostulate nicht entsprechenden Weise angesetzt wird, also durch eine zufällige Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätspostulat. Indessen bedeutet diese Feststellung keinerlei Einwand gegen die molekulartheoretischen Hypothesen von Lorentz, sondern es wird nur klar, daß die Annahme der Kontraktion der Elektronen bei Bewegung in der Lorentzchen Theorie schon an einer früheren Stelle, als dieses durch Lorentz geschieht, eingeführt werden müßte.

*) Ann. d. Phys. 17, p. 891, 1905.

In einem Anhange gehe ich noch auf die Stellung der klassischen Mechanik zum Relativitätspostulate ein. Eine leicht vorzunehmende Anpassung der Mechanik an das Relativitätspostulat würde für die beobachtbaren Erscheinungen kaum merkliche Differenzen ergeben, würde aber zu einem sehr überraschenden Erfolge führen: *Mit der Voranstellung des Relativitätspostulates schafft man sich genau das hinreichende Mittel, um hernach die vollständigen Gesetze der Mechanik allein aus dem Satze von der Erhaltung der Energie* (und Aussagen über die Formen der Energie) *zu entnehmen.*

§ 1.

Bezeichnungen.

Ein Bezugsystem x, y, z, t rechtwinkliger Koordinaten im Raume und der Zeit sei gegeben. Die Zeiteinheit soll in solcher Beziehung zur Längeneinheit gewählt sein, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume 1 ist.

Obwohl ich an sich vorziehen würde, die von Lorentz gebrauchten Bezeichnungen nicht zu ändern, scheint es mir doch wichtig, gewisse Zusammengehörigkeiten durch eine andere Wahl der Zeichen von vornherein hervortreten zu lassen. Ich werde den Vektor

der *elektrischen Kraft* $\mathfrak{E}$, der *magnetischen Erregung* $\mathfrak{M}$, der *elektrischen Erregung* $\mathfrak{e}$, der *magnetischen Kraft* $\mathfrak{m}$

nennen, so daß also $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ an die Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ bei Lorentz treten sollen.

Ich werde mich ferner des Gebrauchs komplexer Größen in einer Weise, wie dies bisher in physikalischen Untersuchungen noch nicht üblich war, bedienen, namentlich statt mit t mit der Verbindung it operieren, wobei i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeute. Andererseits werden ganz wesentliche Umstände in Evidenz treten, indem ich eine Schreibweise mit Indizes benutzen werde, nämlich oft an Stelle von

$$x, y, z, it \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4$$

setzen und hierauf einen allgemeinen Gebrauch der Indizes 1, 2, 3, 4 gründen werde. Dabei wird es sich, wie ich ausdrücklich hervorhebe, stets nur um eine *übersichtlichere Zusammenfassung rein reeller Beziehungen* handeln, und der Übergang zu reellen Gleichungen wird sich überall sofort vollziehen lassen, indem von den Zeichen mit Indizes solche mit *einem* Index 4 stets *rein imaginäre* Werte, solche mit *keinem* Index 4 oder mit *zwei* Indizes 4 stets *reelle* Werte bedeuten werden.

Ein einzelnes Wertsystem x, y, z, t bzw. x_1, x_2, x_3, x_4 soll ein *Raum-Zeitpunkt* heißen.

Ferner bezeichne $\mathfrak{w}$ den Vektor *Geschwindigkeit der Materie*, ε die *Dielektrizitätskonstante*, μ die *magnetische Permeabilität*, σ die *Leitfähigkeit* der Materie, sämtlich als Funktionen von x, y, z, t (oder x_1, x_2, x_3, x_4) gedacht, weiter ϱ die *elektrische Raumdichte*, $\mathfrak{s}$ einen Vektor „elektrischer Strom", zu dessen Definition wir erst in der Folge (in § 7 und 8) kommen werden.

Erster Teil.

Betrachtung des Grenzfalles Äther.

§ 2.

Die Grundgleichungen für den Äther.

Die Lorentzsche Theorie führt die Gesetze der Elektrodynamik der ponderablen Körper durch atomistische Vorstellungen von der Elektrizität zurück auf einfachere Gesetze; an diese einfacheren Gesetze knüpfen wir hier ebenfalls an, indem wir fordern, daß sie den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ der Gesetze für ponderable Körper bilden sollen. In diesem idealen Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ soll $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$ sein und sollen an jedem Raum-Zeitpunkte x, y, z, t die Gleichungen bestehen:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \varrho \mathfrak{w},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{m} = 0.$$

Ich will nun schreiben x_1, x_2, x_3, x_4 für x, y, z, it $(i = \sqrt{-1})$, weiter

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4$$

für

$$\varrho\mathfrak{w}_x,\ \varrho\mathfrak{w}_y,\ \varrho\mathfrak{w}_z,\ i\varrho,$$

d. s. die Komponenten des Konvektionsstromes $\varrho\mathfrak{w}$ und die mit i multiplizierte Raumdichte der Elektrizität, ferner

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\quad f_{14},\quad f_{24},\quad f_{34}$$

für

$$\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -i\mathfrak{e}_x,\ -i\mathfrak{e}_y,\ -i\mathfrak{e}_z,$$

m - i e

d. s. die Komponenten von $\mathfrak{m}$ bzw. $-i\mathfrak{e}$ nach den Achsen, endlich noch allgemein bei zwei der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes h, k

$$f_{kh} = -f_{hk},$$

also

$$f_{32}=-f_{23},\ f_{13}=-f_{31},\ f_{21}=-f_{12},$$
$$f_{41}=-f_{14},\ f_{42}=-f_{24},\ f_{43}=-f_{34}$$

festsetzen.

Alsdann schreiben sich die drei in (I) zusammengefaßten Gleichungen und die mit i multiplizierte Gleichung (II):

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned}
&\qquad\ \ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}=\varrho_1,\\
&\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}\qquad\ \ +\frac{\partial f_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{24}}{\partial x_4}=\varrho_2,\\
&\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{32}}{\partial x_2}\qquad\ \ +\frac{\partial f_{34}}{\partial x_4}=\varrho_3,\\
&\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{43}}{\partial x_3}\qquad\ \ =\varrho_4.
\end{aligned}$$

Andererseits verwandeln sich die drei in (III) zusammengefaßten Gleichungen, mit $-i$ multipliziert, und die Gleichung (IV), mit -1 multipliziert, in

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned}
&\qquad\ \ \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{23}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial f_{43}}{\partial x_1}\qquad\ \ +\frac{\partial f_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial f_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{41}}{\partial x_2}\qquad\ \ +\frac{\partial f_{12}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial f_{32}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{21}}{\partial x_3}\qquad\ \ =0.
\end{aligned}$$

Man bemerkt bei dieser Schreibweise sofort die *vollkommene Symmetrie* des ersten wie des zweiten dieser Gleichungssysteme *in bezug auf die Permutationen der Indizes* 1, 2, 3, 4.

§ 3.

Das Theorem der Relativität von Lorentz.

Die Schreibweise der Gleichungen (I)—(IV) in der Symbolik des Vektorkalküls dient bekanntermaßen dazu, eine Invarianz (oder besser Kovarianz) des Gleichungssystems (A) wie des Gleichungssystems (B) bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt in Evidenz zu setzen. Nehmen wir z. B. eine Drehung um die z-Achse um einen festen Winkel φ vor unter Festhaltung der Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{w}$ im Raume, führen also anstatt x_1, x_2, x_3, x_4 neue Variabelen x_1', x_2', x_3', x_4' ein durch

$$x_1'=x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi,\ x_2'=-x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi,\ x_3'=x_3,\ x_4'=x_4,$$

dazu neue Größen $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ durch

$$\varrho_1'=\varrho_1\cos\varphi+\varrho_2\sin\varphi,\ \varrho_2'=-\varrho_1\sin\varphi+\varrho_2\cos\varphi,\ \varrho_3'=\varrho_3,\ \varrho_4'=\varrho_4,$$

neue Größen $f'_{12}, \ldots, f'_{34}$ durch

$$f'_{23} = f_{23}\cos\varphi + f_{31}\sin\varphi,\ f'_{31} = -f_{23}\sin\varphi + f_{31}\cos\varphi,\ f'_{12} = f_{12},$$
$$f'_{14} = f_{14}\cos\varphi + f_{24}\sin\varphi,\ f'_{24} = -f_{14}\sin\varphi + f_{24}\cos\varphi,\ f'_{34} = f_{34},$$
$$f'_{kh} = -f'_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4),$$

so wird notwendig aus (A) das genau entsprechende System (A′), aus (B) das genau entsprechende System (B′) zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen folgen.

Nun läßt sich auf Grund der Symmetrie des Systems (A) *wie des Systems* (B) *in den Indizes 1, 2, 3, 4 sofort ohne jede Rechnung das von Lorentz gefundene Theorem der Relativität entnehmen.*

Ich will unter $i\psi$ eine rein imaginäre Größe verstehen und die Substitution

$$(1) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3\cos i\psi + x_4\sin i\psi,\ x_4' = -x_3\sin i\psi + x_4\cos i\psi$$

betrachten. Mittels

$$(2) \qquad -i\,\mathrm{tg}\, i\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q, \quad \psi = \frac{1}{2}\log\mathrm{nat}\frac{1+q}{1-q}$$

wird

$$\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \sin i\psi = \frac{iq}{\sqrt{1-q^2}},$$

wobei $-1 < q < 1$ ausfällt und $\sqrt{1-q^2}$ mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist. Schreiben wir noch

$$(3) \qquad x_1' = x',\ x_2' = y',\ x_3' = z',\ x_4' = it',$$

so nimmt daher die Substitution (1) die Gestalt

$$(4) \qquad x' = x,\ y' = y,\ z' = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}},\ t' = \frac{-qz + t}{\sqrt{1-q^2}}$$

mit *lauter reellen Koeffizienten* an.

Ersetzen wir nun in den oben bei der Drehung um die z-Achse genannten Gleichungen überall 1, 2, 3, 4 durch 3, 4, 1, 2, und gleichzeitig φ durch $i\psi$, so erkennen wir, daß, wenn gleichzeitig mit dieser Substitution (1) neue Größen $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ durch

$$\varrho_1' = \varrho_1,\ \varrho_2' = \varrho_2,\ \varrho_3' = \varrho_3\cos i\psi + \varrho_4\sin i\psi,\ \varrho_4' = -\varrho_3\sin i\psi + \varrho_4\cos i\psi,$$

neue Größen $f'_{12}, \ldots, f'_{34}$ durch

$$f'_{41} = f_{41}\cos i\psi + f_{13}\sin i\psi,\ f'_{13} = -f_{41}\sin i\psi + f_{13}\cos i\psi,\ f'_{34} = f_{34},$$
$$f'_{32} = f_{32}\cos i\psi + f_{42}\sin i\psi,\ f'_{42} = -f_{32}\sin i\psi + f_{42}\cos i\psi,\ f'_{12} = f_{12},$$
$$f'_{kh} = -f'_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

eingeführt werden, alsdann ebenfalls das System (A) in das genau entsprechende System (A′), das System (B) in das genau entsprechende

System (B′) zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen übergehen wird.

Alle diese Gleichungen lassen sich sofort in rein reelle Gestalt umschreiben und man kann das letzte Ergebnis so formulieren:

Wird die reelle Transformation (4) vorgenommen und werden hernach x', y', z', t' als ein Bezugsystem für Raum und Zeit angesprochen, werden zugleich

$$(5) \qquad \varrho' = \varrho\left(\frac{-q\mathfrak{w}_z + 1}{\sqrt{1-q^2}}\right),\quad \varrho'\mathfrak{w}'_{z'} = \varrho\left(\frac{\mathfrak{w}_z - q}{\sqrt{1-q^2}}\right),\quad \varrho'\mathfrak{w}'_{x'} = \varrho\mathfrak{w}_x,\quad \varrho'\mathfrak{w}'_{y'} = \varrho\mathfrak{w}_y,$$

ferner

$$(6) \qquad \mathfrak{e}'_{x'} = \frac{\mathfrak{e}_x - q\mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\qquad \mathfrak{m}'_{y'} = \frac{-q\mathfrak{e}_x + \mathfrak{m}_y}{\sqrt{1-q^2}},\qquad \mathfrak{e}'_{z'} = \mathfrak{e}_z$$

und

$$(7) \qquad \mathfrak{m}'_{x'} = \frac{\mathfrak{m}_x + q\mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\qquad \mathfrak{e}'_{y'} = \frac{q\mathfrak{m}_x + \mathfrak{e}_y}{\sqrt{1-q^2}},\qquad \mathfrak{m}'_{z'} = \mathfrak{m}_z$$

eingeführt*), so kommen hernach für die Vektoren $\mathfrak{w}', \mathfrak{e}', \mathfrak{m}'$ mit den Komponenten $\mathfrak{w}'_{x'}, \mathfrak{w}'_{y'}, \mathfrak{w}'_{z'}$; $\mathfrak{e}'_{x'}, \mathfrak{e}'_{y'}, \mathfrak{e}'_{z'}$; $\mathfrak{m}'_{x'}, \mathfrak{m}'_{y'}, \mathfrak{m}'_{z'}$ in dem neuen Koordinatensystem x', y', z' und dazu die Größe ϱ' genau die zu (I)—(IV) analogen Gleichungen (I′)—(IV′) zustande, und zwar geht für sich das System (I), (II) in (I′), (II′), das System (III), (IV) in (III′), (IV′) über.

Wir bemerken, daß hier $\mathfrak{e}_x - q\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{e}_y + q\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{e}_z$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{e} + [\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$ sind, wenn $\mathfrak{v}$ einen Vektor in Richtung der positiven z-Achse vom Betrage $|\mathfrak{v}| = q$ und $[\mathfrak{v}\mathfrak{m}]$ das vektorielle Produkt der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{m}$ bedeutet. Analog sind dann $\mathfrak{m}_x + q\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{m}_y - q\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{m}_z$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{m} - [\mathfrak{v}\mathfrak{e}]$.

Die Gleichungen (6) und (7), wie sie paarweise *unter* einander stehen, können durch eine andere Verwendung imaginärer Größen in

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'} &= (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\cos i\psi + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\sin i\psi,\\
\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'} &= -(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\sin i\psi + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\cos i\psi,\\
\mathfrak{e}'_{z'} + i\mathfrak{m}'_{z'} &= \mathfrak{e}_z + i\mathfrak{m}_z
\end{aligned}$$

zusammengefaßt werden, und wir merken noch an, daß, wenn φ irgendeinen reellen Winkel bedeutet, aus diesen letzten Beziehungen ferner die Kombinationen

$$(8) \qquad \begin{aligned}
&(\mathfrak{e}'_{x'} + i\mathfrak{m}'_{x'})\cos\varphi + (\mathfrak{e}'_{y'} + i\mathfrak{m}'_{y'})\sin\varphi\\
&= (\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\cos(\varphi + i\psi) + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\sin(\varphi + i\psi),
\end{aligned}$$

*) Die Gleichungen (5) stehen hier in anderer Folge, die Gleichungen (6) und (7) aber in der nämlichen Folge wie die zuvor genannten Gleichungen, die auf sie hinauskommen.

$$(9) \qquad -(\mathfrak{e}_{x'}' + i\mathfrak{m}_{x'}')\sin\varphi + (\mathfrak{e}_{y'}' + i\mathfrak{m}_{y'}')\cos\varphi$$
$$= -(\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x)\sin(\varphi + i\psi) + (\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y)\cos(\varphi + i\psi)$$

hervorgehen.

§ 4.

Spezielle Lorentz-Transformationen.

Die Rolle, welche die z-Richtung in der Transformation (4) spielt, kann leicht auf eine beliebige Richtung übertragen werden, indem sowohl das Achsensystem der x, y, z wie das der x', y', z', jedes einer und der nämlichen Drehung in bezug auf sich unterworfen wird. Wir kommen damit zu einem allgemeineren Satze.

Es sei $\mathfrak{v}$ mit den Komponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ ein gegebener Vektor mit einem solchen von Null verschiedenen Betrage $|\mathfrak{v}| = q$, *der kleiner als* 1 *ist*, von irgendeiner Richtung. Wir verstehen allgemein unter $\bar{\mathfrak{v}}$ eine beliebige auf $\mathfrak{v}$ senkrechte Richtung und bezeichnen ferner die Komponente eines Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Richtung $\mathfrak{v}$ oder einer Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$ mit $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$ bzw. $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$.

Anstatt x, y, z, t sollen nun neue Größen x', y', z', t' in folgender Weise eingeführt werden. Wird kurz $\mathfrak{r}$ für den Vektor mit den Komponenten x, y, z im ersten, ferner $\mathfrak{r}'$ für den Vektor mit den Komponenten x', y', z' im zweiten Bezugsystem geschrieben, so soll sein *für die Richtung von* $\mathfrak{v}$:

$$(10) \qquad \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}' = \frac{\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt}{\sqrt{1-q^2}},$$

für jede auf $\mathfrak{v}$ *senkrechte Richtung* $\bar{\mathfrak{v}}$:

$$(11) \qquad \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}' = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}},$$

und ferner:

$$(12) \qquad t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + t}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Die Bezeichnungen $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}'$ und $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}'$ hier sind in dem Sinne zu verstehen, daß der Richtung $\mathfrak{v}$ und jeder zu $\mathfrak{v}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$ in x, y, z immer die Richtung mit den nämlichen Richtungskosinus in x', y', z' zugeordnet wird.

Eine Transformation, wie sie durch (10), (11), (12) mit der Bedingung $0 < q < 1$ dargestellt wird, will ich eine *spezielle Lorentz-Transformation* nennen, und soll $\mathfrak{v}$ der *Vektor*, die Richtung von $\mathfrak{v}$ die *Achse*, der Betrag von $\mathfrak{v}$ das *Moment* dieser speziellen Lorentz-Transformation heißen.

***Werden** weiter ϱ' und die Vektoren $\mathfrak{w}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{m}'$ in x', y', z' dadurch **definiert**, daß*

(13) $$\varrho' = \frac{\varrho(-q\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} + 1)}{\sqrt{1-q^2}},$$

(14) $$\varrho'\mathfrak{w}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\varrho\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} - \varrho q}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \varrho'\mathfrak{w}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \varrho\mathfrak{w}_{\bar{\mathfrak{v}}},$$

*ferner**)

(15) $$(\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\bar{\mathfrak{v}}} = \frac{(\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\bar{\mathfrak{v}}}}{\sqrt{1-q^2}},$$
$$(\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\mathfrak{v}}$$

***ist**, so folgt der Satz, daß das Gleichungssystem* (I), (II) *und* (III), (IV) ***jedesmal** in das genau entsprechende System zwischen den mit Strichen versehenen Größen übergeht.*

Die Auflösung der Gleichungen (10), (11), (12) führt auf:

(16) $$\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + qt'}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}, \qquad t = \frac{q\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + t'}{\sqrt{1-q^2}}. -$$

Wir schließen nun eine in der Folge sehr wichtige Bemerkung über die Beziehung der Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}'$ an. Es möge wieder die schon mehrfach gebrauchte Bezeichnung mit den Indizes 1, 2, 3, 4 herangezogen werden, so daß wir x_1', x_2', x_3', x_4' für x', y', z', it' und ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3', ϱ_4' für $\varrho'\mathfrak{w}_{x'}'$, $\varrho'\mathfrak{w}_{y'}'$, $\varrho'\mathfrak{w}_{z'}'$, $i\varrho'$ setzen. Wie eine Drehung um die z-Achse, so ist offenbar auch die Transformation (4) und allgemeiner die Transformation (10), (11), (12) eine solche *lineare Transformation* von der Determinante $+1$, *wodurch*

(17) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \text{ d. i. } x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2, \text{ d. i. } x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$$

übergeht.

Es wird daher auf Grund der Ausdrücke (13), (14) auch

$$-(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \varrho_4^2) = \varrho^2(1 - \mathfrak{w}_x^2 - \mathfrak{w}_y^2 - \mathfrak{w}_z^2) = \varrho^2(1 - \mathfrak{w}^2)$$

in $\varrho'^2(1 - \mathfrak{w}'^2)$ übergehen, oder mit andern Worten

(18) $$\varrho\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv genommen sei, eine *Invariante* bei Lorentz-Transformationen sein.

---

*) Die runden Klammern sollen nur die Ausdrücke zusammenfassen, welche der Index betrifft, und $[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}]$ soll das vektorielle Produkt von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{e} + i\mathfrak{m}$ bedeuten.

Indem wir $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ durch diese Größe dividieren, entstehen die 4 Werte

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

zwischen welchen die Beziehung

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \tag{19}$$

besteht. Offenbar sind diese 4 Werte eindeutig durch den Vektor $\mathfrak{w}$ bestimmt, und umgekehrt folgt aus irgend 4 Werten w_1, w_2, w_3, w_4, wobei w_1, w_2, w_3 reell, $-iw_4$ reell und positiv ist und die Bedingung (19) statthat, rückwärts gemäß diesen Gleichungen eindeutig ein Vektor $\mathfrak{w}$ von einem Betrage < 1.

Die Bedeutung von w_1, w_2, w_3, w_4 hier ist, daß sie die Verhältnisse von dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 zu

$$\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)} = dt\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} \tag{20}$$

für die im Raum-Zeitpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 befindliche Materie beim Übergang zu zeitlich benachbarten Zuständen derselben Stelle der Materie sind. Nun übertragen sich die Gleichungen (10), (11), (12) sofort auf die zusammengehörigen Differentiale dx, dy, dz, dt und dx', dy', dz', dt' und insbesondere wird daher für sie

$$-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) = -(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2)$$

sein. Nach Ausführung der Lorentz-Transformation ist im neuen Bezugsystem die Geschwindigkeit der Materie im nämlichen Raum-Zeitpunkte x', y', z', t' der Vektor $\mathfrak{w}'$ mit den Verhältnissen $\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$ als Komponenten auszulegen.

Nunmehr ist ersichtlich, daß das Wertsystem

$$x_1 = w_1, \quad x_2 = w_2, \quad x_3 = w_3, \quad x_4 = w_4$$

vermöge der Lorentz-Transformation (10), (11), (12) eben in dasjenige neue Wertsystem

$$x_1' = w_1', \quad x_2' = w_2', \quad x_3' = w_3', \quad x_4' = w_4'$$

übergeht, das für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}'$ *nach* der Transformation genau die Bedeutung hat wie das erstere Wertsystem für die Geschwindigkeit *vor* der Transformation.

Ist insbesondere der Vektor $\mathfrak{v}$ der speziellen Lorentz-Transformation gleich dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ der Materie im Raum-Zeitpunkte x_1, x_2, x_3, x_4, so folgt aus (10), (11), (12):

$$w_1' = 0, \quad w_2' = 0, \quad w_3' = 0, \quad w_4' = i.$$

Unter diesen Umständen erhält also der betreffende Raum-Zeitpunkt nach der Transformation die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}' = 0$, er wird, wie wir uns ausdrücken können, *auf Ruhe transformiert*. Wir können danach die Invariante $\varrho\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$ passend als *Ruh-Dichte* der Elektrizität bezeichnen.

§ 5.

Raum-Zeit-Vektoren I^ter und II^ter Art.

Indem wir das Hauptergebnis bezüglich der speziellen Lorentz-Transformationen mit der Tatsache zusammennehmen, daß das System (A) wie das System (B) jedenfalls bei einer Drehung des räumlichen Bezugsystems um den Nullpunkt kovariant ist, erhalten wir das allgemeine *Theorem der Relativität*. Um es leicht verständlich zu formulieren, dürfte es zweckmäßig sein, zuvor eine Reihe von abkürzenden Ausdrücken festzulegen, während ich andererseits daran festhalten will, komplexe Größen zu verwenden, um bestimmte Symmetrien in Evidenz zu setzen.

Eine lineare homogene Transformation

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' + \alpha_{14}x_4', \\
x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3' + \alpha_{24}x_4', \\
x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3' + \alpha_{34}x_4', \\
x_4 &= \alpha_{41}x_1' + \alpha_{42}x_2' + \alpha_{43}x_3' + \alpha_{44}x_4'
\end{aligned} \tag{21}
$$

von der Determinante $+1$, in welcher alle Koeffizienten ohne einen Index 4 reell, dagegen $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ sowie $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ rein imaginär (ev. Null), endlich α_{44} wieder reell und speziell > 0 ist und durch welche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ in } x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

übergeht, will ich allgemein eine *Lorentz-Transformation* nennen.

Wird

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = z', \quad x_4' = it'$$

gesetzt, so entsteht daraus sofort eine homogene lineare Transformation von x, y, z, t in x', y', z', t' mit lauter reellen Koeffizienten, wobei das Aggregat

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \text{ in } -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2$$

übergeht und einem jeden solchen Wertesystem x, y, z, t mit *positivem* t, wofür dieses Aggregat > 0 ausfällt, stets auch ein *positives* t' entspricht; letzteres ist aus der Kontinuität des Aggregats in x, y, z, t leicht ersichtlich.

Die letzte Vertikalreihe des Koeffizientensystems von (21) hat die Bedingung

$$\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1 \tag{22}$$

zu erfüllen.

Sind $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{34} = 0$, so ist $\alpha_{44} = 1$ und die Lorentz-Transformation reduziert sich auf eine bloße Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Sind α_{14}, α_{24}, α_{34} nicht sämtlich Null und setzt man

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = \mathfrak{v}_x : \mathfrak{v}_y : \mathfrak{v}_z : i,$$

so folgt aus (22) der Betrag

$$q = \sqrt{\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2} < 1.$$

Andererseits kann man zu jedem Wertesystem α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{44}, das in dieser Weise mit reellen $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ die Bedingung (22) erfüllt, die *spezielle* Lorentz-Transformation (16) mit α_{14}, α_{24}, α_{34}, α_{44} als letzter Vertikalreihe konstruieren und jede Lorentz-Transformation mit der nämlichen letzten Vertikalreihe der Koeffizienten kann alsdann zusammengesetzt werden aus dieser speziellen Lorentz-Transformation und einer sich daran anschließenden Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen bildet eine *Gruppe*.

Unter einem *Raum-Zeit-Vektor* I. Art soll verstanden werden ein beliebiges System von vier Größen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 mit der Vorschrift, bei jeder Lorentz-Transformation (21) es durch dasjenige System ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3', ϱ_4' zu ersetzen, das aus (21) für die Werte x_1', x_2', x_3', x_4' hervorgeht, wenn für x_1, x_2, x_3, x_4 die Werte ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 genommen werden.

Verwenden wir neben dem variabeln Raum-Zeit-Vektor I. Art x_1, x_2, x_3, x_4 einen zweiten solchen variabeln Raum-Zeit-Vektor I. Art u_1, u_2, u_3, u_4 und fassen die bilineare Verbindung

$$\begin{aligned} &f_{23}(x_2 u_3 - x_3 u_2) + f_{31}(x_3 u_1 - x_1 u_3) + f_{12}(x_1 u_2 - x_2 u_1) \\ &+ f_{14}(x_1 u_4 - x_4 u_1) + f_{24}(x_2 u_4 - x_4 u_2) + f_{34}(x_3 u_4 - x_4 u_3) \end{aligned} \tag{23}$$

mit sechs Koeffizienten $f_{23}, \cdots, f_{34}$ auf. Wir bemerken, daß diese einerseits sich in vektorieller Schreibweise aus den vier Vektoren

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\quad u_1,\ u_2,\ u_3;\quad f_{23},\ f_{31},\ f_{12};\quad f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$$

und den Konstanten x_4 und u_4 aufbauen läßt, andererseits symmetrisch in den Indizes 1, 2, 3, 4 ist. Indem wir x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 gleichzeitig gemäß der Lorentz-Transformation (21) substituieren, geht (23) in eine Verbindung

$$\begin{aligned} &f_{23}'(x_2' u_3' - x_3' u_2') + f_{31}'(x_3' u_1' - x_1' u_3') + f_{12}'(x_1' u_2' - x_2' u_1') \\ &+ f_{14}'(x_1' u_4' - x_4' u_1') + f_{24}'(x_2' u_4' - x_4' u_2') + f_{34}'(x_3' u_4' - x_4' u_3') \end{aligned} \tag{24}$$

mit gewissen allein von den sechs Größen $f_{23}, \cdots, f_{34}$ und den sechzehn Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{44}$ abhängenden sechs Koeffizienten $f'_{23}, \cdots, f'_{34}$ über.

Einen *Raum-Zeit-Vektor II. Art* definieren wir als ein System von sechs Größen $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$ mit der Vorschrift, es bei jeder Lorentz-Transformation durch dasjenige neue System $f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}$ zu ersetzen, das dem eben erörterten Zusammenhange der Form (23) mit der Form (24) entspricht.

Das allgemeine Theorem der Relativität betreffend die Gleichungen (I)—(IV), die „Grundgleichungen für den Äther", spreche ich nunmehr folgendermaßen aus.

Werden x, y, z, it (Raumkoordinaten und Zeit $\times\, i$) *einer beliebigen Lorentz-Transformation unterworfen und gleichzeitig* $\varrho\mathfrak{w}_x$, $\varrho\mathfrak{w}_y$, $\varrho\mathfrak{w}_z$, $i\varrho$ (Konvektionsstrom und Ladungsdichte $\times\, i$) *als Raum-Zeit-Vektor I. Art, ferner* $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$, $-i\mathfrak{e}_x$, $-i\mathfrak{e}_y$, $-i\mathfrak{e}_z$ (magnetische Kraft und elektrische Erregung $\times -i$) *als Raum-Zeit-Vektor II. Art transformiert, so geht das System der Gleichungen* (I), (II) *und das System der Gleichungen* (III), (IV) *je in das System der entsprechend lautenden Beziehungen zwischen den entsprechenden neu eingeführten Größen über.*

Kürzer mag diese Tatsache auch mit den Worten angedeutet werden: Das System der Gleichungen (I), (II) wie das System der Gleichungen (III), (IV) ist kovariant bei jeder Lorentz-Transformation, wobei $\varrho\mathfrak{w}$, $i\varrho$ als Raum-Zeit-Vektor I. Art, $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ als Raum-Zeit-Vektor II. Art zu transformieren ist. Oder noch prägnanter:

$\varrho\mathfrak{w}$, $i\varrho$ *ist ein Raum-Zeit-Vektor I. Art,* $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ *ist ein Raum-Zeit-Vektor II. Art.*

Ich füge noch einige Bemerkungen hier an, um die Vorstellung eines Raum-Zeit-Vektors II. Art zu erleichtern. *Invarianten* für einen solchen Vektor $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ bei der Gruppe der Lorentz-Transformationen sind offenbar

$$\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2, \tag{25}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{e} = i(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}). \tag{26}$$

Ein Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ (wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ reelle Raum-Vektoren sind), mag *singulär* heißen, wenn das skalare Quadrat $(\mathfrak{m} - i\mathfrak{e})^2 = 0$, d. h. $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = 0$ und zugleich $(\mathfrak{m}\mathfrak{e}) = 0$ ist, d. h. *die Vektoren* $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{e}$ *gleichen Betrag haben und zudem senkrecht aufeinander stehen.* Wenn solches der Fall ist, bleiben diese zwei Eigenschaften für den Raum-Zeit-Vektor II. Art bei jeder Lorentz-Transformation erhalten.

Ist der Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ *nicht singulär*, so drehen wir zunächst das räumliche Koordinatensystem so, daß das Vektorprodukt $[\mathfrak{m}\mathfrak{e}]$ in die z-Achse fällt, daß $\mathfrak{m}_z = 0$, $\mathfrak{e}_z = 0$ ist. Dann ist

$$(\mathfrak{m}_x - i\mathfrak{e}_x)^2 + (\mathfrak{m}_y - i\mathfrak{e}_y)^2 \neq 0,$$

also $\frac{\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x}$ verschieden von $\pm i$ und wir können daher ein komplexes Argument $\varphi + i\psi$ derart bestimmen, daß

$$\operatorname{tg}(\varphi + i\psi) = \frac{\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x}$$

ist. Alsdann wird mit Rücksicht auf die Gleichung (9) durch die zu ψ gehörige Transformation (1) und eine nachherige Drehung um die z-Achse durch den Winkel φ eine Lorentz-Transformation bewirkt, nach der auch noch $\mathfrak{m}_y = 0$, $\mathfrak{e}_y = 0$ werden, also nunmehr $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ beide in die neue x-Linie fallen; dabei sind durch die Invarianten $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2$ und $(\mathfrak{m}\mathfrak{e})$ die schließlichen Größen dieser Vektoren und ob sie von gleicher oder entgegengesetzter Richtung werden oder einer Null wird, von vornherein fixiert.

§ 6.

Begriff der Zeit.

Durch die Lorentz-Transformationen werden gewisse Abänderungen des Zeitparameters zugelassen. Infolgedessen ist es nicht mehr statthaft, von der *Gleichzeitigkeit* zweier Ereignisse an sich zu sprechen. Die Verwendung dieses Begriffes setzt vielmehr voraus, daß die Freiheit der 6 Parameter, die zur Angabe eines Bezugsystems für Raum und Zeit offen steht, bereits in gewisser Weise auf eine Freiheit von nur 3 Parametern eingeschränkt ist. Nur weil wir gewohnt sind, diese Einschränkung stark approximativ eindeutig zu treffen, halten wir den Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse als an sich existierend.*) In Wahrheit aber sollen folgende Umstände zutreffen.

Ein Bezugsystem x, y, z, t für Raum-Zeitpunkte (Ereignisse) sei irgendwie bekannt. Wird ein Raumpunkt $A(x_0, y_0, z_0)$ zur Zeit $t_0 = 0$ mit einem anderen Raumpunkte $P(x, y, z)$ zu einer anderen Zeit t verglichen und ist die Zeitdifferenz $t - t_0$ (es sei etwa $t > t_0$) *kleiner* als die Länge AP, d. i. die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von A nach P braucht, und ist q der Quotient $\frac{t-t_0}{AP} < 1$, so können wir durch die spezielle Lorentz-Transformation, die AP als Achse und q als Moment hat, einen neuen Zeitparameter t' einführen, der (s. Gleichung (12) in § 4) für beide Raum-Zeitpunkte A, t_0 und P, t den gleichen Wert $t' = 0$ erlangt; es lassen sich also diese zwei Ereignisse auch als gleichzeitig auffassen.

*) Ungefähr wie Wesen, gebannt an eine enge Umgebung eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, darauf verfallen könnten, die Kugel sei ein geometrisches Gebilde, an welchem ein Durchmesser an sich ausgezeichnet ist.

Nehmen wir weiter zu einer und derselben Zeit $t_0 = 0$ zwei verschiedene Raumpunkte A, B oder drei Raumpunkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, und vergleichen damit einen Raumpunkt P außerhalb der Geraden AB oder der Ebene ABC zu einer anderen Zeit t und ist die Zeitdifferenz $t - t_0$ (es sei etwa $t > t_0$) *kleiner* als die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von der Geraden AB oder der Ebene ABC nach P braucht, und q der Quotient aus der ersteren und der letzeren Zeit, so erscheinen nach Anwendung der speziellen Lorentz-Transformation, die als Achse das Lot auf AB, bzw. ABC durch P und als Moment q hat, alle drei (beziehungsweise vier) Ereignisse A, t_0; B, t_0; (C, t_0) und P, t als gleichzeitig.

Werden jedoch vier Raumpunkte, die nicht in einer Ebene liegen, zu einer und derselben Zeit t_0 aufgefaßt, so ist es nicht mehr möglich, durch eine Lorentz-Transformation eine Abänderung des Zeitparameters vorzunehmen, ohne daß der Charakter der Gleichzeitigkeit dieser vier Raum-Zeitpunkte verloren geht.

Dem Mathematiker, der an Betrachtungen über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten und andererseits an die Begriffsbildungen der sogenannten nicht-Euklidischen Geometrie gewöhnt ist, kann es keine wesentliche Schwierigkeit bereiten, den Begriff der Zeit an die Verwendung der Lorentz-Transformationen zu adaptieren. Dem Bedürfnisse, sich das Wesen dieser Transformationen physikalisch näher zu bringen, kommt der in der Einleitung zitierte Aufsatz von A. Einstein entgegen.

Zweiter Teil.

Die elektromagnetischen Vorgänge.

§ 7.

Die Grundgleichungen für ruhende Körper.

Nach diesen vorbereitenden Ausführungen, die wir des etwas geringeren mathematischen Apparates wegen an dem idealen Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ entwickelten, wenden wir uns jetzt zu den Gesetzen für die elektromagnetischen Vorgänge in der Materie. Wir suchen diejenigen Beziehungen, die es — unter Voraussetzung geeigneter Grenzdaten — ermöglichen, an jedem Orte und zu jeder Zeit, also als Funktionen von x, y, z, t zu finden: die Vektoren der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$, der magnetischen Erregung $\mathfrak{M}$, der elektrischen Erregung $\mathfrak{e}$, der magnetischen Kraft $\mathfrak{m}$, die elektrische Raumdichte ϱ, den Vektor „elektrischer Strom $\mathfrak{s}$“ (dessen Beziehung zum Leitungsstrom hernach durch die Art des Auftretens der