

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 39.

1. Grundlagen einer Theorie der Materie; von Gustav Mie.

(Zweite Mitteilung.¹⁾)

Zweites Kapitel.

Das Problem des Elektrons.

Die Knotenstellen der Felder.

11. Bekanntlich folgt aus der Natur des elektromagnetischen Feldes als eines Sechservektors, daß im Äther Transversalwellen auftreten können. Eine oberflächliche Betrachtung der von mir aufgestellten Grundgleichungen der Ätherdynamik (1) bis (4) könnte zu der Meinung verführen, daß in analoger Weise der Vierervektor $(v, i\rho)$ zu Longitudinalwellen Veranlassung geben müßte. Das wäre aber ein Irrtum. Im Innern eines Atoms, wo in der Hamiltonschen Funktion der Teil H_1 (I. p. 524) überwiegt, mögen vielleicht transversale und longitudinale Impulse ähnlichen Gesetzen folgen. Es können das aber nicht die Gesetze der Wellen sein, weil diese zur Voraussetzung haben, daß die Differentialgleichungen linear sind, und weil das im Innern der Atome nicht der Fall ist. In größeren Entfernungen vom Atom, wo H_1 gegen $(v^2 - \dot{\eta}^2)/2$ ganz zurücktritt, schließen sich die *transversalen* Impulse zu Hohlkugelschalen, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit 1 (Lichtgeschwindigkeit) weiter ausbreiten. Aber die *longitudinalen* Impulse erfahren keine derartige Umwandlung, weil für ρ und v die Gleichungen niemals linear werden. Vielmehr bleibt der longitudinale Impuls im wesentlichen immer auf ein kleines Volumen, nämlich das Volumen eines Elektrons, beschränkt, er breitet sich nicht über eine Kugelschale aus, seine Geschwindigkeit kann alle möglichen Werte haben, aber

1) Fortsetzung des Artikels: Ann. d. Phys. 37. p. 511; zitiert als I. Annalen der Physik. IV. Folge. 39.

immer unter 1. Mit anderen Worten: Die Impulse des Vierervektors $(\mathfrak{b}, i\rho)$ haben nie den Charakter von Longitudinalwellen, sondern den einer „Quantenstrahlung“, es sind die Elektronenstrahlen. Wären Longitudinalwellen im Äther möglich, so könnte nicht zugleich auch die Existenz unveränderlicher Anhäufungsstellen des Zustandes ρ , also die Existenz von Elektronenstrahlen mit den Grundgleichungen vereinbar sein. Umgekehrt schließt also die Tatsache der Elektronenstrahlen das Vorkommen von Longitudinalwellen aus.

Vor allen Dingen werden wir untersuchen müssen, was die Bedingungen dafür sind, daß der Charakter der Hamiltonschen Funktion H (oder der Weltfunktion Φ) zur Existenz unveränderlicher Knotenstellen führt. Diese Bedingungen sind dann auch zugleich die für die Existenz von Quantenstrahlen. Seien nämlich ρ die Ladungsdichte und \mathfrak{b} die elektrische Verschiebung in der Umgebung der Knotenstelle als Funktionen der Entfernung r vom Zentrum berechnet, so daß die Gleichgewichtsbedingung $\nabla\varphi + \mathfrak{e} = 0$ erfüllt ist. Wenn wir nun an dem Vierervektor $(0, i\rho)$ und dem Sechservektor $(0, -i\mathfrak{b})$, sowie an dem Koordinatensystem (x, y, z, t) eine Lorentzsche Transformation ausführen, so erhalten wir in dem Koordinatensystem (x', y', z', t') einen Vierervektor $(\mathfrak{v}', i\rho')$ und einen Sechservektor $(\mathfrak{h}', -i\mathfrak{b}')$ in bestimmter Weise als Funktionen von (x', y', z', t') , und zwar erfüllen beide Vektoren die von uns angenommenen Grundgleichungen der Ätherdynamik. Aus den Transformationsformeln ist sofort zu sehen, daß $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{b}']$, $\mathfrak{v}' = \rho' \cdot \mathfrak{q}$, wo \mathfrak{q} ein dreidimensionaler Vektor, kleiner als 1, ist, der im ganzen Raum und für alle Zeiten konstant ist. Die neue, durch die Anwendung der Transformation gewonnene Lösung stellt also eine Knotenstelle dar, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit \mathfrak{q} vorwärts bewegt.

Wenn Gleichgewicht für eine ruhende Knotenstelle möglich ist, so gibt es auch Knotenstellen, die sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit unter 1 bewegen, also Quantenstrahlen, keine Longitudinalwellen.

12. Zu einer interessanten Aussage über die Bewegungen der elektrischen Ladungen im allgemeinen kommt man, wenn man die beiden Annahmen macht, daß *erstens die Funktion H keine gerade Funktion von σ ist* und *daß zweitens H und Φ für*

alle wirklich vorkommenden Werte der Variablen (b, h, ρ, v) und (e, ψ, q, f) keine Sprünge und keine Knicke haben. Die erste dieser beiden Annahmen ist identisch damit, daß positive und negative Ladungen ein prinzipiell verschiedenes Verhalten zeigen, wie es ja in der Wirklichkeit ist, da es Elektronen nur von *einem* Vorzeichen gibt. Wäre H eine gerade Funktion von σ , so könnte man das Vorzeichen von σ , d. h. von ρ , umkehren, ohne daß in den Gleichungen etwas geändert würde, positive und negative Ladungen müßten sich also ganz gleich verhalten. Die zweite Annahme kommt darauf hinaus, daß die Zustandsgrößen der einen Art (z. B. die Intensitätsgrößen) nur dann unendlich werden und nur dann sich sprunghaft ändern, wenn man die entsprechenden Größen der anderen Art (die Quantitätsgrößen) unendlich werden läßt, bzw. sprunghaft ändert.

Die Größe ρ ist in den Gleichungen der Ätherdynamik in mancher Hinsicht ein Analogon zu der Abweichung der Dichte vom normalen Zustand in den Gleichungen der Aërodynamik (vgl. I. p. 520). In der Aërodynamik können sich positive und negative Dichtigkeitsänderungen, beispielsweise bei Interferenzen, überlagern und sich zu Null oder wenigstens zu einer kleineren Dichtigkeitsänderung addieren. Es liegt nahe, dasselbe auch für die Ladungsdichte ρ im Äther anzunehmen, so daß sich also positive und negative Ladungen durch Superposition vernichten und umgekehrt sich durch Scheidung aus dem Nichts neu bilden könnten. In der Tat liegt diese Annahme gewissen modernen Atomtheorien zugrunde, wenn sie das Atom aus einem großen positiv elektrischen Volumen bestehen lassen, das für die negativ elektrischen Elektronen vollkommen durchdringbar ist. Denn wenn in das positiv elektrische Volumen ein Elektron hineingeht, so superponiert sich seine Ladung zu der vorhandenen, sie wird also kleiner als die Ladung eines freien Elektrons. Tritt das Elektron aus dem Atom heraus, so stellt sich durch Scheidung wieder die größere negative Ladung des Elektrons und die größere positive des Atomrestes her.

Unsere Theorie ergibt nun, wenn man die beiden oben aufgeführten Annahmen hinzufügt, daß derartige Vorstellungen auszuschließen sind. Aus den Gleichungen der Ätherdynamik

ergibt sich nämlich, daß, wenn eine der Zustandsgrößen (δ, η, ρ, ν) oder, was nach der zweiten von uns gemachten Annahme dasselbe ist, ($\epsilon, \beta, \varphi, \mathfrak{f}$) als Funktion der Koordinaten (x, y, z) einen Sprung hat, daß dann sofort eine andere Zustandsgröße unendlich werden muß. Solange wir also singuläre Stellen ausschließen, in denen die Zustandsgrößen alle oder zum Teil unendlich werden, also Singularitäten, wie sie in solchen Integralen der Gleichungen, die *überall reale* Vorgänge wiedergeben, nicht vorkommen können, solange müssen sämtliche Zustandsgrößen *stetige* Funktionen von x, y, z, t sein. Weiter folgt aus der ersten unserer Annahmen, daß stets sein muß: $\nu^2 < \rho^2$ oder $\nu^2/\rho^2 < 1$. Denn sobald $\nu^2 > \rho^2$ würde, so bekäme σ imaginäre Werte, und alsdann würde H , da es keine gerade Funktion von σ ist, komplex. Da das bei allen *realen* Vorgängen ausgeschlossen sein muß, so ist stets $\nu^2/\rho^2 < 1$. Nun können wir uns aber die gesamte in der Welt befindliche Ladung in lauter räumliche Elemente zerteilt denken und alle Veränderungen in der Ladungsdichte, die die Existenz des Vektors ν mit sich bringt, dadurch entstanden denken, daß sich jedes dieser Elementarteilchen mit der (variablen) Geschwindigkeit $q = \nu/\rho$ verschiebt. Nach dem, was wir bisher bewiesen haben, ist q eine *überall endliche und stetige* Funktion der Koordinaten. Ist das nun aber der Fall, so können sich niemals einige von den räumlichen Elementarteilchen, die wir uns vorstellen, übereinanderschieben. Jedes einzelne Element bleibt vielmehr für sich erhalten, es kann also nicht vorkommen, daß sich positive und negative Ladungen gegenseitig vernichten, oder daß sie sich aus Nichts neu bilden.

Das Gesetz von der Erhaltung der Ladungen gilt nicht nur für die Summe aller Ladungen, sondern getrennt sowohl für die positiven, wie für die negativen Ladungen.

Wenn also ein Elektron in den positiven Raumteil eines Atoms eintritt, so muß nach unserer Theorie die positive Ladung erst vor ihm ausweichen und sich dann hinter ihm schließen, wie eine Flüssigkeit, in die ein fester Körper eindringt.

Die Gleichgewichtsbedingungen.

13. Die Energie in dem ganzen von den Vorgängen eingenommenen Raum berechnet sich nach Gleichung (7) (I. p. 523) zu:

$$E = \int (H + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h} - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b}) \cdot dV.$$

Wenn Ruhe herrscht, so ist:

$$E_0 = \int H \cdot dV.$$

Die Bedingung für Gleichgewicht ist, das bei einer kleinen virtuellen Änderung $\delta \mathfrak{b}$, $\delta \varrho$ (wobei $\delta \varrho = \text{div } \delta \mathfrak{b}$) keine Energieumwandlung in Bewegungsenergie eintritt. Es muß also sein: $\delta E = 0$, wenn man in E nur ϱ und \mathfrak{b} variiert:

$$\begin{aligned} \delta E &= \int \left(\frac{\partial H}{\partial \varrho} \cdot \delta \varrho + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{b}} \cdot \delta \mathfrak{b} \right) \cdot dV \\ &= \int (-\varphi \cdot \delta \varrho + \mathfrak{e} \cdot \delta \mathfrak{b}) \cdot dV. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\varphi \cdot \delta \varrho = \text{div}(\varphi \cdot \delta \mathfrak{b}) - \nabla \varphi \cdot \delta \mathfrak{b}$$

und weiter:

$$\int_V \text{div}(\varphi \cdot \delta \mathfrak{b}) \cdot dV = \int_S \varphi \cdot \delta \mathfrak{b}_N \cdot dS,$$

wo S die den Raum V umschließende Oberfläche und N die Richtung der Flächennormale bedeuten soll. Wählt man V genügend groß, so ist das Oberflächenintegral verschwindend klein, folglich:

$$\delta E = \int (\nabla \varphi + \mathfrak{e}) \cdot \delta \mathfrak{b} \cdot dV.$$

Als *Gleichgewichtsbedingung* folgt daher aus $\delta E = 0$ die uns schon bekannte Gleichung:

$$(29) \quad \nabla \varphi + \mathfrak{e} = 0.$$

14. Sehr schwierig ist zu entscheiden, ob das Gleichgewicht labil oder stabil ist. Es seien die Größen \mathfrak{e}_0 , \mathfrak{b}_0 , φ_0 , ϱ_0 so berechnet, daß sie die Gleichgewichtsbedingung erfüllen.

Das System bewege sich nun unendlich langsam in unendlicher Nähe der Gleichgewichtslage, so daß:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 + \delta\mathfrak{b}, \quad \varrho = \varrho_0 + \delta\varrho, \quad \mathfrak{h} = \delta\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{v} = \delta\mathfrak{v},$$

ebenso:

$$e = e_0 + \delta e, \quad \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi.$$

Die Zustände $\delta\mathfrak{h}$ und $\delta\mathfrak{v}$ bringen es mit sich, daß im Laufe einer unendlich kleinen Zeit dt Änderungen von \mathfrak{b} und ϱ eintreten, die wir $d\mathfrak{b}$ und $d\varrho$ nennen wollen (I. Gl. (1) und (3)):

$$d\mathfrak{b} = -(\delta\mathfrak{v} - \text{rot } \delta\mathfrak{h}) \cdot dt,$$

$$d\varrho = -\text{div } \delta\mathfrak{v} \cdot dt.$$

Andererseits bedingt die kleine Abweichung vom Gleichgewicht, daß sich die Bewegungszustände \mathfrak{h} und \mathfrak{v} , oder was auf dasselbe hinauskommt, \mathfrak{b} und \mathfrak{f} , im Laufe der Zeit dt ändern (I. Gl. (2) und (4)):

$$d\mathfrak{b} = -\text{rot } \delta e \cdot dt,$$

$$d\mathfrak{f} = -(\delta e + \nabla \delta\varphi) \cdot dt.$$

Um den Energieumsatz deutlich zu erkennen, zerlegen wir $d\mathfrak{b}$ in zwei Teile $d\mathfrak{b} = d\mathfrak{b}' + d\mathfrak{b}''$, wo:

$$(30) \quad \begin{cases} d\mathfrak{b}' = -\delta\mathfrak{v} \cdot dt, \\ d\mathfrak{b}'' = \text{rot } \delta\mathfrak{h} \cdot dt. \end{cases}$$

Man sieht ohne weiteres, daß:

$$\delta e \cdot d\mathfrak{b}' - \delta\varphi \cdot d\varrho = \delta\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} + \text{div}(\delta\varphi \cdot \delta\mathfrak{v}) \cdot dt,$$

$$\delta e \cdot d\mathfrak{b}'' = -\delta\mathfrak{h} \cdot d\mathfrak{b} - \text{div}[\delta e \cdot \delta\mathfrak{h}] \cdot dt.$$

Integrieren wir über einen Raumteil V , in welchem nur innere Energieumsätze stattfinden, auf dessen Begrenzung also die Energieströme $-\delta\varphi \cdot \delta\mathfrak{v}$ und $[\delta e \cdot \delta\mathfrak{h}]$ Null sind, so ergibt sich:

$$(31) \quad \begin{cases} \int_V (\delta e \cdot d\mathfrak{b}' - \delta\varphi \cdot d\varrho) \cdot dV = \int_V \delta\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f} \cdot dV, \\ \int_V \delta e \cdot d\mathfrak{b}'' = -\int_V \delta\mathfrak{h} \cdot d\mathfrak{b} \cdot dV. \end{cases}$$

Wir wollen nun annehmen, daß $\delta\mathfrak{h}$ und $\delta\mathfrak{v}$ in dem betrachteten Augenblick so gerichtet sind, daß $d\mathfrak{b}'$ und $d\mathfrak{b}''$ dieselbe Richtung haben wie $\delta\mathfrak{b}$, und $d\varrho$ dasselbe Vorzeichen

wie $\delta\rho$, daß also die Abweichung vom Gleichgewichtszustand noch zunimmt. Wenn das Gleichgewicht stabil sein soll, so müssen alsdann die Bewegungszustände abnehmen, es muß also $d\mathfrak{f}$ entgegengesetzt gerichtet sein mit $\delta\mathfrak{f}$, und $d\mathfrak{b}$ entgegengesetzt mit $\delta\mathfrak{b}$. Wenn umgekehrt bei den angenommenen Richtungen von $\delta\mathfrak{v}$ und $\delta\mathfrak{h}$ die Bewegungszustände $\delta\mathfrak{f}$ und $\delta\mathfrak{b}$ noch zunehmen, so ist das Gleichgewicht labil. Soll also das Gleichgewicht stabil sein, so muß:

$$\int (\delta\varphi \cdot \delta\rho - \delta\epsilon \cdot \delta\mathfrak{b}') \cdot dV$$

dasselbe Vorzeichen haben wie

$$\int \delta\mathfrak{v} \cdot \delta\mathfrak{f} \cdot dV$$

und

$$\int \delta\epsilon \cdot \delta\mathfrak{b}'' \cdot dV$$

dasselbe Vorzeichen haben wie

$$\int \delta\mathfrak{h} \cdot \delta\mathfrak{b} \cdot dV,$$

wo $\delta\mathfrak{b}' + \delta\mathfrak{b}'' = \delta\mathfrak{b}$ sein soll, und zwar $\text{div } \delta\mathfrak{b}' = \delta\rho$, $\text{div } \delta\mathfrak{b}'' = 0$, und wo ferner die Variationen $\delta\mathfrak{v}$ und $\delta\mathfrak{h}$ so gewählt sein sollen, daß $\delta\mathfrak{v}$ proportional mit $\delta\mathfrak{b}'$ und $\text{rot } \delta\mathfrak{h}$ proportional mit $\delta\mathfrak{b}''$ ist.

Wir betrachten die beiden Bedingungen nur einzeln, indem wir erstens $\delta\mathfrak{b}' = \delta\mathfrak{b}$ und zweitens $\delta\mathfrak{b}'' = \delta\mathfrak{b}$ annehmen. Es läßt sich leicht ein sehr wichtiger Fall nennen, in welchem überhaupt keine magnetischen Wirkungen mitspielen, also $\delta\mathfrak{b}'' = 0$ und demnach $\delta\mathfrak{b}' = \delta\mathfrak{b}$ ist. Wir denken uns nämlich in dem zentrisch-symmetrischen Felde eines kugelförmigen Elektrons unendlich kleine Variationen eingeführt, in der Weise, daß alles stets zentrisch-symmetrisch bleibt, daß also nur auf konzentrischen Kugelschalen Verdichtungen und Verdünnungen der Ladungen eintreten: $\delta\rho$, und daß $\delta\mathfrak{b}$ radial gerichtet ist. $\delta\mathfrak{b}$ und $\delta\rho$ müssen ferner reine Funktionen von r , der Entfernung vom Zentrum sein. Bei einer solchen Variation hat $\delta\epsilon$ stets ein Potential, es treten daher niemals magnetische Felder ein. Infolgedessen ist $\delta\mathfrak{v} = \partial\delta\mathfrak{b}/\partial t$ stets radial gerichtet und eine reine Funktion von r , die zentrische

Symmetrie geht auch im weiteren Verlauf der Veränderungen niemals verloren.

Soll nun das Elektron mitsamt seinem ganzen Felde im stabilen Gleichgewicht sein, so daß es nicht etwa bei irgendwelchen Verschiebungen der Ladungen in seinem Innern und in seiner Atmosphäre explodiert, dann muß bei den von uns angenommenen zentrisch-symmetrischen Variationen die Bedingung gelten:

$$\int (\delta\varphi \cdot \delta\rho - \delta e \cdot \delta b) \cdot dV$$

hat gleiches Vorzeichen mit

$$\int \delta v \cdot \delta f \cdot dV.$$

Wir wollen nun eine Variation ins Auge fassen, bei der eine Änderung von ρ nur auf zwei unendlich dünnen Kugelschalen von den Dicken ε_1 und ε_2 stattfindet. Der mittlere Abstand der Kugelschalen sei a , und zwar sei a klein gegen den mittleren Radius r der Kugelschalen. Es seien ferner die Variationen von ρ mit $\delta\rho_1$ und $-\delta\rho_2$ bezeichnet, so daß also:

$$\varepsilon_1 \cdot \delta\rho_1 = \varepsilon_2 \cdot \delta\rho_2$$

(mit Vernachlässigung von Größen der Ordnung a/r gegen 1); wir haben dann nur in dem Zwischenraum zwischen den beiden Schichten eine Variation des elektrischen Feldes

$$\delta b = \delta\rho_1 \cdot \varepsilon_1 = \delta\rho_2 \cdot \varepsilon_2,$$

in den Schichten ε_1 und ε_2 geht δb kontinuierlich auf Null zurück.

Ich rechne weiter mit der in Abschnitt 13. (I. p. 532) eingeführten Hypothese, daß H nur von den beiden Variablen:

$$\sigma = \rho \cdot \sqrt{1 - v^2/\rho^2} \quad \text{und} \quad p = b^2 - \eta^2$$

abhängt. Es ist dann:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} \cdot \delta\sigma + 2 \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial p} \cdot b \cdot \delta b,$$

$$\delta e = \frac{\partial e}{\partial\sigma} \cdot \delta\sigma + 2 \cdot \frac{\partial e}{\partial p} \cdot b \cdot \delta b,$$

wobei $\delta v/\rho$ als unendlich klein gegen 1 vernachlässigt, also $\sigma = \rho$ gesetzt werden kann. Da nun nach I. Gl. (26) p. 532:

$$e = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot b, \quad \varphi = - \frac{\partial H}{\partial \sigma},$$

so ist:

$$2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot b \cdot \delta b \cdot \delta \rho = - 2 \cdot \frac{\partial e}{\partial \sigma} \cdot \delta \rho \cdot \delta b,$$

also:

$$\begin{aligned} \delta \varphi \cdot \delta \rho - \delta e \cdot \delta b &= \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \cdot \delta \rho^2 + 4 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot b \cdot \delta b \cdot \delta \rho \\ &\quad - 2 \cdot \frac{\partial e}{\partial p} \cdot b \cdot \delta b^2. \end{aligned}$$

Integrieren wir über die ganze Kugelschale, in der die Variationen eingetreten sind, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} \int (\delta \varphi \cdot \delta \rho - \delta e \cdot \delta b) \cdot dV &= 4\pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \cdot (\delta \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1 + \delta \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot b \cdot (\delta \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1^2 + \delta \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2^2) - 2 \cdot \frac{\partial e}{\partial p} \cdot b \cdot \delta \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot a \right). \end{aligned}$$

Wenn wir ε_1 und ε_2 genügend klein wählen, so ist ganz allein das erste Glied in der Klammer für das Vorzeichen ausschlaggebend, das Vorzeichen des ganzen Ausdruckes ist also dasselbe wie das von $\partial \varphi / \partial \sigma$, oder, wie wir im Falle der Ruhe ($\sigma = \rho$) auch sagen können, von $\partial \varphi / \partial \rho$.

Das Vorzeichen von

$$\int \delta v \cdot \delta f \cdot dV$$

ergibt sich leicht, wenn wir beachten, daß nach I. Gl. (26) p. 532:

$$\delta f = \frac{\varphi}{\rho} \cdot \delta v,$$

es ist identisch mit dem Vorzeichen von φ/ρ . Daraus ergibt sich folgender Satz:

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes ist, daß überall der partielle Differentialquotient $\partial \varphi / \partial \rho$ dasselbe Vorzeichen haben muß, wie der Quotient φ/ρ .

Diese Bedingung ist beispielsweise immer erfüllt, wenn φ stets dasselbe Vorzeichen hat wie ρ , und wenn φ mit zunehmendem ρ gleichfalls stets zunimmt. Das ist der Fall, wenn H eine gerade Funktion von ρ ist, die sich durch eine

Reihenentwicklung mit lauter negativen Koeffizienten darstellen läßt.

Enthält H , wie es jedenfalls sein muß (vgl. Absatz 12.), auch ungerade Potenzen von ρ , so kann sowohl $\partial\varphi/\partial\rho$, als auch φ/ρ sein Vorzeichen umkehren. Wenn nun H_1 (vgl. I. p. 524) nur von σ abhinge und ebenso infolgedessen auch φ , so könnte $\partial\varphi/\partial\rho$ nur da Null werden, wo φ einen Maximal- oder einen Minimalwert erreicht. Es wäre dann also unmöglich, daß gleichzeitig $\partial\varphi/\partial\rho$ und φ/ρ ihr Vorzeichen umkehrten. Enthält aber φ (und damit auch H_1) die beiden Variablen σ und p , so ist es nicht ausgeschlossen, daß es Felder gibt, in denen die Bedingung erfüllt ist; dazu müßte natürlich das Feld eines Elektrons gehören. Diese Überlegung ist deswegen wichtig, weil das Superpositionsprinzip für die elektromagnetischen Vektoren, auf dem die Maxwell'schen Gleichungen beruhen, im Innern der Atome ungültig wird, wenn H_1 nicht nur von σ , sondern auch von p abhängt. Es ist also nicht in unser Belieben gestellt, ob wir die Maxwell'schen Gleichungen im Innern der Atome aufgeben wollen oder nicht, wir sind gezwungen, sie aufzugeben, sobald wir die Grundgleichungen für positive und negative Ladungen unsymmetrisch machen. In einem späteren Abschnitt werden wir auch noch erkennen, weswegen diese Unsymmetrie notwendig ist.

Um die zweite Stabilitätsbedingung zu diskutieren, denken wir uns eine Gleichgewichtsstörung dadurch herbeigeführt, daß zu dem Feld ein $\delta\mathfrak{b}$ hinzukommt, welches für sich auf geschlossenen Kurven verläuft, so daß also $\delta\rho=0$ ist. Die Kurven mögen die Form von Vierecken haben, von denen zwei Seiten mit den Feldlinien \mathfrak{b} parallel gehen und zwei in jedem Punkt dazu senkrecht stehen. Wir fassen einen Moment ins Auge, in welchem gerade $v=0$ ist, so daß also nur die zweite der Gleichungen (31) in Betracht kommt. Wir bilden nun längs der rechteckigen Kurvenzüge der Linien von $\delta\mathfrak{b}$ das Integral:

$$\int \delta\epsilon \cdot \delta\mathfrak{b} \cdot dV.$$

Längs der zu den Linien von \mathfrak{b} senkrecht verlaufenden Kurvenstrecken ist:

$$\delta\epsilon = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta\mathfrak{b},$$

da p bis auf Größen von der Ordnung δb^2 unverändert bleibt. Längs der zu b parallel verlaufenden Kurvenstrecken dagegen ist

$$\delta e = 4 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \cdot b^2 \cdot \delta b + 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta b.$$

Wir wollen nun zur Abkürzung setzen:

$$4 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \cdot b^2 + 2 \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial e}{\partial b}.$$

Es bedeutet dies also den Differentialquotienten von e , den man erhält, wenn man nur b ändert und zwar so, daß es bei ungeänderter Richtung um δb zunimmt. Wir haben also:

$$\int \delta e \cdot \delta b \cdot dV = \int_I \frac{\partial e}{\partial b} \cdot \delta b^2 \cdot dV + \int_{II} 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta b^2 \cdot dV,$$

wo I den Raumteil bedeutet, in welchem die Linien δb parallel zu b gehen, II den, in welchem sie senkrecht dazu stehen. Andererseits ist

$$\int \delta h \cdot \delta b \cdot dV = \int 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta h^2 \cdot dV.$$

Sollen nun beide Integrale unter allen Umständen gleiches Vorzeichen haben, wie die Stabilitätsbedingung verlangt, auch wenn die Kurven δb so verlaufen, daß das Integral I weit über dem Integral II vorwiegt, so muß $\partial e / \partial b$ dasselbe Vorzeichen haben wie $2 \partial H / \partial p$ oder e/b .

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes ist, daß der partielle Differentialquotient $\partial e / \partial b$, den man erhält, wenn man b ohne Änderung der Richtung nur seiner Größe nach variiert, überall dasselbe Vorzeichen hat wie e/b .

Diese Bedingung ist stets erfüllt, wenn e immer dasselbe Vorzeichen hat wie b , und wenn außerdem e immer mit zunehmendem b wächst. In der gewöhnlichen Elektrostatik ist daher das Gleichgewicht der Felder bekanntlich stets stabil.

In unserer allgemeineren Theorie liegt dagegen die Sache nicht mehr so einfach. Wir werden noch sehen, daß sich im Innern eines Elektrons das Vorzeichen von e/b notwendigerweise umkehren muß, dann muß sich also an derselben Stelle auch das Vorzeichen von $\partial e / \partial b$ umkehren.

Ob die beiden als notwendig erkannten Bedingungen auch hinreichend für die Stabilität des Gleichgewichtes sind, läßt

sich nicht sagen. Soviel ist auf jeden Fall klar, daß in der allgemeinen Theorie auch labile Gleichgewichtslagen vorkommen können. In der Tat könnte die Theorie unmöglich den Anspruch einer allgemeinen Theorie der Materie machen, wenn sie nicht auch die tatsächlich vorkommenden Fälle labilen Gleichgewichtes mit umfaßte.

15. Wie wir schon früher gesehen haben, ist es häufig bequemer, mit der Weltfunktion Φ zu rechnen, anstatt mit der Hamiltonschen Funktion H . Man muß dann (vgl. I. p. 524) als unabhängige Zustandsvariablen die Intensitätsgrößen (e , b , φ , η) nehmen. Ist speziell $b = 0$, $\eta = 0$, so ist in Gleichung (27) I. p. 533 η einfach der absolute Wert von e und $\chi = \varphi$, es ergibt sich also:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \frac{e \cdot de}{\eta},$$

$$db = \frac{\partial b}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \frac{\partial b}{\partial \eta} \cdot \frac{e \cdot de}{\eta}.$$

Setzen wir $db = 0$, so ist:

$$\frac{e \cdot de}{\eta} = - \frac{\frac{\partial b}{\partial \varphi}}{\frac{\partial b}{\partial \eta}} \cdot d\varphi,$$

wo ∂b die Änderung des Betrages von b , ohne Änderung der Richtung bedeutet. Es ist also:

$$d\varphi = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial b}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial b}{\partial \varphi}}{\frac{\partial b}{\partial \eta}} \cdot d\varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = \frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial b}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial b}{\partial \varphi}}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial b}{\partial \varphi} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \cdot \partial \eta} \cdot \frac{e}{\eta},$$

oder, da ∂b die Änderung des absoluten Wertes von b bedeuten soll:

$$\frac{\partial b}{\partial \varphi} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \cdot \partial \eta} = - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

Somit bekommen wir schließlich:

$$(32) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\frac{\partial b}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial q}{\partial \varphi}}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man $d\varrho = 0$ setzt:

$$(33) \quad \frac{\partial e}{\partial b} = \frac{\frac{\partial q}{\partial \varphi}}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial q}{\partial \varphi}}$$

Die Ausdrücke (32) und (33) müssen also mit φ/q bzw. e/b immer gleiches Vorzeichen haben, wenn das Gleichgewicht stabil sein soll.

16. Es bleibt noch die Frage zu erledigen, was für Bedingungen die Weltfunktion erfüllen muß, damit überhaupt eine kugelförmige Knotenstelle mit äußerst dünner elektrischer Atmosphäre als Gleichgewichtslage der Ätherzustände möglich ist. Wir denken uns einen Radius r vom Zentrum der Knotenstelle aus gezogen, der so lang ist, daß an seinem Ende schon das Superpositionsgesetz $e = b$ gilt. Die gesamte Ladung im Innern einer Kugel von diesem großen Radius r sei m , dann ist das Potential des elektrischen Feldes im Endpunkt von r : $\psi = m/4\pi r$. Im Gleichgewicht muß diese Größe ψ mit φ identisch sein: $\varphi = m/4\pi r$. Es sei nun weiter die Ladungsdichte der elektrischen Atmosphäre im Endpunkt von r gleich ρ , also die in einer Kugelschale von der Dicke dr enthaltene Ladung $dm = 4\pi r^2 \cdot \rho \cdot dr$, dann ist die Änderung von φ längs der Strecke dr :

$$d\varphi = -\frac{m}{4\pi \cdot r^2} \cdot dr + \frac{dm}{4\pi \cdot r}$$

Das zweite Glied muß verschwindend klein gegen das erste sein. Das heißt, da:

$$\frac{dm}{4\pi r} = r \cdot \rho \cdot dr,$$

es muß $r \cdot \rho$ verschwindend klein gegen $m/4\pi \cdot r^2$ sein, es muß also $r \cdot \rho$ schneller gegen Null konvergieren als r^{-2} .

Die Ladungsdichte ρ der Atmosphäre eines elektrischen Knotenpunktes muß schneller gegen Null konvergieren als r^{-3} .

Wenn sich die Weltfunktion Φ für kleine Werte von

$$\chi = \sqrt{\varphi^2 - f^2} \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt{e^2 - b^2}$$

durch eine Summe von Potenzen darstellen läßt, so muß diese Summe folgendermaßen aussehen:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\eta^2 + \sum \alpha_\mu \cdot \chi^\mu + \sum \beta_\nu \cdot \eta^\nu + \sum \gamma_{hk} \cdot \chi^h \cdot \eta^k,$$

$$\mu > 4, \quad \nu > 2, \quad h \geq 1, \quad \eta \geq 2.$$

Falls unter den Exponenten μ , h gebrochene Zahlen vorkommen, muß ihr Nenner immer ungerade sein, weil Φ sonst für negative Werte von φ imaginär würde; für die Exponenten ν , k gilt diese Vorschrift nicht, weil η stets positiv ist.

Dann und nur dann, wenn die Reihe für Φ diese Bedingungen erfüllt, gilt folgendes: *erstens* können b und ϱ für $\eta = 0$ bzw. $\chi = 0$ nicht unendlich werden; *zweitens* wird $\partial b / \partial e$ für kleine Werte von η und χ gleich 1; *drittens* konvergiert ϱ für $\chi = m/4\pi r$ und $\eta = m/4\pi r^2$ von höherer Ordnung als r^{-3} gegen Null, wenn man r unendlich groß werden läßt.

Die Stabilitätsbedingungen sind für kleine Werte von η und χ , d. h. im Vakuum, freilich nicht für jede beliebige derartige Funktion Φ erfüllt, aber doch in sehr vielen Fällen, beispielsweise immer dann, wenn die beiden kleinsten Exponenten μ und h geradzahlig sind und die Koeffizienten der Glieder mit diesen kleinsten Potenzen von χ positiv sind. Dann ist nämlich $\partial \varrho / \partial \varphi$ ebenso wie $\partial b / \partial e$ für kleine Werte der Variablen stets positiv, nach (32) und (33) ist demnach auch $\partial \varphi / \partial \varrho > 0$, $\partial e / \partial b > 0$. Da ferner e/b und φ/ϱ in schwachen Feldern dann ebenfalls stets positiv sind, so sind in diesen Fällen die Stabilitätsbedingungen im Vakuum immer erfüllt.

Die Differentialgleichung des elektrostatischen Feldes für den Fall sphärischer Symmetrie.

17. Im statischen Felde ist $\varphi = \chi$ und, abgesehen von der Richtung, $e = \eta$, also:

$$|b| = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \varrho = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Ferner ist bei zentrischer Symmetrie, wenn wir der Kürze wegen für den Betrag von δ anstatt $|\delta|$ einfach δ schreiben:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot \delta) = \frac{d\delta}{dr} + \frac{2\delta}{r} = \rho.$$

Daraus folgt:

$$r \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{d\eta}{dr} + r \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dr} + 2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0.$$

Nun ist aber bei Gleichgewicht:

$$\eta = - \frac{d\varphi}{dr} = - \varphi', \quad \frac{d\eta}{dr} = - \frac{d^2\varphi}{dr^2} = - \varphi''.$$

Φ ist eine gegebene Funktion von φ und φ' : $\Phi(\varphi, \varphi')$. Wir erhalten demnach als *Gleichgewichtsbedingung bei zentrischer Symmetrie* die folgende Differentialgleichung für φ :

$$(34) \quad r \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi'^2} \cdot \varphi'' + 2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} + r \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} \cdot \varphi' - \Phi \right) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, das allgemeine Integral hat demnach zwei willkürliche Konstanten. Da die Gleichung in φ'' vom ersten Grad ist, hat sie keine singulären Integrale. Die beiden willkürlichen Konstanten sind bestimmt, wenn für ein bestimmtes r Potential φ und Feldstärke $-\varphi'$ gegeben sind, oder wenn auf den beiden Begrenzungen eines Kugelkondensators die Potentiale φ_1 und φ_2 gegeben sind. Man kann also jedes beliebige Feld zwischen den Kugelschalen eines Kugelkondensators als Integral der Gleichung (34) gewinnen, selbstverständlich muß es in experimentell zugänglichen Fällen von dem der gewöhnlichen Elektrostatik nicht merkbar verschieden sein, das genauere Integral gibt nur noch die unmerkbar feinen elektrischen Atmosphären an, die auf jeder der beiden Feldbegrenzungen liegen. Dabei haben wir zunächst nur den Bereich zwischen den beiden Kugelflächen ins Auge gefaßt. Geht man über diesen Bereich hinaus, so hat das Integral, wie wir gleich sehen werden, für gewisse Werte von r singuläre Stellen, die es physikalisch unmöglich machen, es ist also im allgemeinen nur in begrenzten Gebieten brauchbar.

Eine Singularität hat das Integral im allgemeinen für den Wert $r=0$. Man sieht das daran, daß das Glied höchster Ordnung φ'' mit r multipliziert ist. Und zwar ist die Singu-

larität von φ in $r=0$ im allgemeinen eine *wesentliche*, wie sie nur transzendente Funktionen (z. B. die elliptischen Funktionen, die Exponentialfunktionen usw.) haben können. Das Eigentümliche dabei ist aber, daß diese wesentliche Singularität durch eine bestimmte Festsetzung der einen Willkürlichkeit des Integrals zum Verschwinden gebracht wird. Man kann das leicht zeigen, indem man die Weltfunktion Φ um ein Wertesystem $\varphi = a$, $\varphi' = 0$ herum in eine Potenzreihe in $(\varphi - a)$ und φ' entwickelt. Es ist das bekanntlich stets möglich, wenn Φ nicht gerade für $\varphi = a$, $\varphi' = 0$ eine Singularität hat. Nach dem Ansatz auf p. 14 ist die niedrigste Potenz von φ' die zweite. Es sei also:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + a_{20} \cdot \varphi'^2 + a_{30} \cdot \varphi'^3 + \dots \\ &+ (\varphi - a) \cdot (a_{01} + a_{21} \varphi'^2 + a_{31} \varphi'^3 + \dots \\ &+ (\varphi - a)^2 \cdot (a_{02} + a_{22} \varphi'^2 + a_{32} \cdot \varphi'^3 + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten alle als gegebene Größen zu betrachten sind. Setzen wir nun in $\rho = \partial \Phi / \partial \varphi$, $\delta = \partial \Phi / \partial \varphi'$ ein:

$$\begin{aligned} (\varphi - a) &= \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \dots, \\ \varphi' &= 2 \alpha_2 r + 3 \alpha_3 r^2 + \dots, \end{aligned}$$

wo die α_2 , $\alpha_3 \dots$ unbekannt sind, so liefert die Gleichung (34), die man auch schreiben kann:

$$\frac{d \left(r^2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'} \right)}{dr} = r^2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

Rekursionsformeln, nach denen man der Reihe nach α_2 , α_3 usw. durch a und die Koeffizienten der Weltfunktion ausdrücken kann. Wir haben somit ein Integral gewonnen, das im Punkte $r=0$ keine Singularität hat, das aber auch nur *eine einzige* willkürliche Konstante, nämlich a enthält. Es läßt sich beweisen, daß es kein anderes Integral geben kann, das sich in eine Potenzreihe, eventuell auch mit gebrochenen Exponenten oder mit logarithmischen Gliedern um $r=0$ herum entwickeln läßt. Damit ist bewiesen, daß alle anderen Integrale in $r=0$ eine *wesentliche* Singularität haben müssen.

Genau dasselbe gilt auch im Punkte $r = \infty$. Setzt man $r^{-1} = u$, so lautet die Differentialgleichung (34) so:

$$\frac{d\left(u^{-2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi'}\right)}{du} = -u^4 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Entwickelt man Φ um $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ herum in eine Potenzreihe nach φ und φ' (vgl. p. 14), und setzt nun ein:

$$\begin{aligned} \varphi &= a \cdot u \cdot (1 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots), \\ \varphi' &= -a \cdot u^2 \cdot (1 + 2\alpha_1 u + 3\alpha_2 u^2 + \dots), \end{aligned}$$

so bekommt man Rekursionsformeln, durch die man der Reihe nach α_1, α_2 usw. aus a und den Koeffizienten der Weltfunktion berechnen kann. Wir haben also in der Umgebung von $u = 0$ ein Integral, das hier keine Singularität hat. Dieses Integral enthält aber nur *eine einzige* Willkürlichkeit, nämlich a . Alle anderen Lösungen der Differentialgleichung (34) haben in $u = 0$ eine *wesentliche* Singularität.

Während das allgemeine Integral, wie wir auf p. 15 gesehen haben, das Feld zwischen den beiden Begrenzungen eines Kugelkondensators zu berechnen gestattet, auf denen die Potentiale φ_1 und φ_2 beliebig gegeben sind, liefert das partikuläre Integral, das im Punkte $r = 0$ keine Singularität hat, das Feld im Innern einer geladenen Hohlkugel. Nach der gewöhnlichen Elektrostatik ist hier $\varphi = \text{const.}$, $e = 0$, und das besprochene Integral wird in allen praktisch realisierbaren Fällen hiervon nicht bemerkbar abweichen. Die Reihenentwicklung auf p. 16:

$$(\varphi - a) = \alpha_2 \cdot r^2 + \alpha_3 \cdot r^3 + \dots$$

muß also in allen praktisch realisierbaren Fällen ganz verschwindend kleine Koeffizienten haben und die Größe a gibt ziemlich genau das konstante Potential in und auf der Hohlkugel an. Indessen muß nach unserer Theorie im Innern eine, wenn auch äußerst schwache elektrische Atmosphäre vorhanden sein, und ihr entspricht das nach der Reihenentwicklung auf p. 16 zu berechnende elektrische Feld. Jedenfalls ist aber der Zustand im Innern der Hohlkugel vollkommen bestimmt, wenn das Potential auf ihr (und damit a) gegeben ist. Man erkennt hieraus, weswegen das im Innern der Hohl-

kugel geltende Integral nur eine einzige Willkürlichkeit enthalten darf.

Das partikuläre Integral, für welches der Punkt $r = \infty$ oder $r^{-1} = u = 0$ keine Singularität ist, stellt das Feld im Außenraum einer geladenen Kugel dar, von welcher alle anderen Gegenstände unendlich entfernt sind. Nach der gewöhnlichen Elektrostatik ist hier: $\varphi = a/r$, wo $a = m/4\pi$, m die Ladung der Kugel. In allen praktisch realisierbaren Fällen müssen demnach die Koeffizienten α_1, α_2 usw. der Reihe auf p. 17:

$$\varphi = a \cdot u \cdot (1 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots)$$

verschwindend klein sein, sie führen zur Berechnung des äußerst schwachen Feldes, das der dünnen Atmosphäre um die geladene Kugel herum entspricht. Jedenfalls erkennt man, daß das äußere Feld vollständig bestimmt ist, wenn man die Ladung m der Kugel, und damit die Konstante a kennt. Man versteht nun, weswegen das Integral, das in $u = 0$ keine Singularität hat, nur eine einzige Willkürlichkeit enthält.

Wir sehen also, wie die Integrale der Gleichung (34) alle Möglichkeiten erschöpfend darstellen, die es für zentrisch symmetrische Felder gibt, und wir dürfen mit einer kleinen Verallgemeinerung wohl folgenden Schluß hieraus ziehen:

Es gibt sicher unendlich viele Formen für die Weltfunktion Φ , bei denen man mit der gewöhnlichen Elektrostatik nicht in Konflikt kommt.

Diskussion eines Beispiels: $\Phi = -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{6}a\chi^6$.

18. Die Funktion:

$$(35) \quad \Phi = -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{6}a \cdot \chi^6$$

befriedigt alle Bedingungen, die in 16. für die Weltfunktion aufgestellt sind. Sie liefert in statischen Feldern:

$$(36) \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{e}, \quad \varrho = a \cdot \varphi^5.$$

Da für positive und negative Ladungen alles symmetrisch ist, darf das Superpositionsprinzip $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}$ auch im Innern der Knotenstellen herrschen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht labil würde.

Die Differentialgleichung (34) vereinfacht sich in diesem Fall wesentlich, sie wird:

$$(37) \quad r \cdot \varphi'' + 2 \cdot \varphi' + a \cdot r \cdot \varphi^5 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich ohne weiteres einmal integrieren. Wenn man die Abkürzung einführt $r \cdot \varphi^2 = v$, so läßt sich (37) nach Multiplikation mit $4r \cdot (2r\varphi' + \varphi)$ folgendermaßen schreiben:

$$(38) \quad \begin{cases} r^2 \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{v'^2}{v} \right) + 2r \cdot \frac{v'^2}{v} - v' + 4a \cdot v^2 \cdot v' = 0, \\ v = r \cdot \varphi^2. \end{cases}$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\frac{r^2 \cdot v'^2}{v} - v + \frac{4a}{3} \cdot v^3 = C,$$

wo C eine Integrationskonstante ist. Diese Gleichung läßt sich aber durch eine Quadratur lösen, wenn man an Stelle von r die unabhängige Variable $\xi = \ln r/r_0$ einführt, wo r_0 die zweite willkürliche Konstante ist.

$$(39) \quad \begin{cases} \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = C \cdot v + v^2 - \frac{4a}{3} \cdot v^4, \\ \xi = \ln \frac{r}{r_0}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{v}{r}}. \end{cases}$$

Das Integral dieser Gleichung ist im allgemeinen eine elliptische Funktion von ξ , es hat also, wie zu erwarten war, für $\xi = \infty$, d. h. für $r = 0$ und $r = \infty$, eine wesentliche Singularität.

Da φ natürlich reell sein muß, werde ich nur die Lösungen von (39) diskutieren, die für reelle Argumente reell und positiv sind. Wir werden drei Fälle unterscheiden, nämlich: C positiv, C negativ, C gleich Null.

19. I. Fall: $C > 0$.

Ich werde die (einzige) *positive* Lösung der kubischen Gleichung

$$(40) \quad C + \gamma - \frac{4a}{3} \cdot \gamma^3 = 0$$

immer mit γ bezeichnen:

$$(40a) \quad \gamma > 0,$$

und nun an Stelle von C die folgende Größe als Integrationskonstante benutzen:

$$(41) \quad h = + \sqrt{\frac{C}{3C + 2\gamma}}.$$

Aus der Integrationskonstante h berechne ich die folgenden drei Größen:

$$(42) \quad \begin{cases} b = h \cdot \sqrt{\frac{1-h^2}{1-3h^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4a}}, \\ k^2 = \frac{(1-h) \cdot (1-3h)}{(1+h) \cdot (1+3h)}, \\ p = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1+h)(1+3h)}{1-3h^2}}. \end{cases}$$

Wenn C von 0 bis ∞ wächst, steigt h beständig an von 0 bis $1/\sqrt{3}$, b und p bleiben also stets reell, und zwar wachsen beide beständig, b von 0 bis ∞ , p von $+0,5$ bis ∞ , dagegen nimmt k^2 , das für $h=0$ den Wert 1 hat, beständig ab, geht bei $h=1/3$ durch Null, kehrt sein Vorzeichen um und erreicht für $h=1/\sqrt{3}$ den Wert $-(2-\sqrt{3})^2 = -0,0718$. Man übersieht das Verhalten der drei Größen leicht mit Hilfe der folgenden Tabelle:

C	h	b	p	k^2
0	0	0	$+\frac{1}{2}$	+ 1
$+\frac{1}{3\sqrt{a}}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3\sqrt{a}}$	+ 1	0
$+\infty$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	$+\infty$	$-(2-\sqrt{3})^2$

Wenn man nun für v eine Funktion u substituiert nach folgender Gleichung:

$$v = b \cdot \frac{1+u}{(1-u) + h(1+u)},$$

so ergibt eine ganz elementare Rechnung, daß u der bekannten Differentialgleichung der Jacobischen Funktionen vom Modul k genügt, wir erhalten:

$$(43) \quad \begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1+u}{(1-u) + h(1+u)}}, \\ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = (1-u^2) \cdot (1-k^2 u^2), \\ x = p \cdot \ln \frac{r}{r_0}. \end{cases}$$

Ist $k^2 > 0$, so erhalten wir, indem wir $u = -cnx/dnx$ setzen:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \sqrt{\frac{dnx - cnx}{(dnx + cnx) + k \cdot (dnx - cnx)}}, \\ x &= p \cdot \ln \frac{r}{r_0}, \quad k^2 > 0, \end{aligned} \right.$$

wo dnx und cnx die bekannten Jacobischen Funktionen sind. Die willkürliche Konstante r_0 bedeutet bei dieser Wahl des Integrals u denjenigen Wert von r , in welchem φ Null wird, denn für $r = r_0$, also $x = 0$ wird $dnx = cnx = 1$. In der Nähe von $x = 0$ gelten die Potenzreihenentwickelungen:

$$\begin{aligned} dnx &= 1 - \frac{k^2 x^2}{2} + \frac{k^2 \cdot (4 + k^2)}{24} \cdot x^4 - \frac{k^2 \cdot (16 + 44k^2 + k^4)}{720} \cdot x^6 + \dots \\ cnx &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1 + 4k^2}{24} \cdot x^4 - \frac{1 + 44k^2 + 16k^4}{720} \cdot x^6 + \dots \end{aligned}$$

Setzt man diese Reihen ein, so bekommt man folgende Entwicklung:

$$\frac{dnx - cnx}{(dnx + cnx) - k \cdot (dnx - cnx)} = \frac{x^2 \cdot (1 - k^2)}{4} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{12p^2} + \frac{x^4}{360p^4} + \dots \right).$$

Die hingeschriebenen Anfangsglieder der unendlichen Reihe bilden zugleich auch den Beginn der Reihenentwicklung für die folgende Funktion:

$$(1 - k^2) \cdot p^2 \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{2p}} - e^{-\frac{x}{2p}}}{2} \right)^2 = \frac{x^2 \cdot (1 - k^2)}{4} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{12p^2} + \frac{x^4}{360p^4} + \dots \right).$$

Erst vom Gliede x^6 an weichen die beiden Reihen voneinander ab. Setzt man die zuletzt hingeschriebene Funktion anstatt der ersten in (44) ein, so bekommt man demnach einen Näherungswert für φ , der bei kleinen Werten von x nur äußerst wenig von dem genauen Wert φ abweicht. Dieser Näherungswert ist:

$$\varphi = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{b \cdot (1 - k^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} - \sqrt{\frac{r_0}{r}} \right),$$

was man auch so schreiben kann:

$$(45) \quad \begin{cases} \varphi = A \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right), \\ A = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{b \cdot (1 - k^2)} \cdot r_0. \end{cases}$$

In der Gegend von $r = r_0$ weicht der aus unserer Theorie berechnete Wert von φ nur unmerkbar wenig von dem Wert des Potentials ab, das die gewöhnliche Elektrostatik in einem Kugelkondensator ergibt, in welchem an der Stelle $r = r_0$ das Potential Null und die Feldstärke A/r_0^2 herrscht.

Wenn die Stelle r_0 und die Feldstärke in r_0 gegeben ist, so kann man aus der in (45) für A hingeschriebenen Formel auch den Wert von h berechnen, damit sind die beiden willkürlichen Konstanten des Integrals von (37) vollständig bestimmt.

Man sieht aus dem eben bewiesenen Satz, daß in der Umgebung der Nullstelle des Potentials die elektrische Atmosphäre überall außerordentlich dünn ist. Je weiter man aber von der Nullstelle weggeht, um so stärker treten die elektrischen Atmosphären hervor. Die gewöhnliche Elektrostatik ist also nur in einem Kugelkondensator gültig, dessen Schalen nicht gar zu weit voneinander entfernt sind. Je weiter man den Zwischenraum zwischen beiden nimmt, um so mehr tritt der Einfluß der elektrischen Atmosphären hervor, die den beiden Schalen vorgelagert sind, der positiv elektrischen Atmosphäre vor der Schale mit positivem Potential und der negativ elektrischen Atmosphäre vor der anderen Schale. Sehr dicht wird die Atmosphäre schließlich, wenn die Schale von der Stelle r_0 so weit entfernt ist, daß der Wert x , der dem r der Schale entspricht, nahezu gleich der Halbperiode $\pm 2K$ der elliptischen Funktionen $dn x$ und $cn x$ wird. Bei gegebenem r_0 tritt das um so eher ein, je kleiner $2K$, also je kleiner h und je größer demnach h ist. Aus Formel (45) ist aber leicht zu sehen, daß mit wachsendem h auch die Größe A , d. h. die Feldstärke in r_0 , zunimmt. Der größte Wert von h , für den die Formel (44) noch gilt, ist $h = 1/3$, ihm entspricht der Wert

$$A = 0,289 \cdot \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt[4]{a}} \quad \text{und} \quad 2K = \pi.$$

In diesem Spezialfall ist $dn x = 1$, $cn x = \cos x$. Will man die Feldstärke in r_0 noch größer annehmen, so muß man mit einer etwas modifizierten Formel rechnen. Da für $h > 1/3$, $k^2 < 0$ ist, so führe man als Modul die folgende Größe κ ein, die positiv und kleiner als 1 ist: $\kappa^2 = -k^2/(1-k^2)$, ferner ersetze man die Größe p durch eine Größe $q = p \cdot \sqrt{1-k^2}$, während man b ungeändert läßt. Man hat also die Formeln (42) durch die folgenden zu ersetzen:

$$(46) \quad \begin{cases} b = h \cdot \sqrt{\frac{1-h^2}{1-3h^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4a}}, \\ \kappa^2 = \frac{(3h-1) \cdot (1-h)}{8h} = \frac{-k^2}{1-k^2}, \\ q = \sqrt{\frac{2h}{1-3h^2}} = p \cdot (1-k^2). \end{cases}$$

Wächst h von $1/3$ bis $1/\sqrt{3}$, so nehmen alle drei Größen ständig zu. Die Grenzwerte zeigt die folgende Tabelle:

C	h	b	q	κ^2
$+\frac{1}{3 \cdot \sqrt{a}}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3 \cdot \sqrt{a}}$	$+1$	0
$+\infty$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Führt man weiter an Stelle von x die Variable

$$y = x / \sqrt{1-x^2} = q \cdot \ln r/r_0$$

ein, so bekommt man an Stelle der Gleichungen (43) die folgenden:

$$(47) \quad \begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1+u}{(1-u)+h(1+u)}}, \\ \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = (1-u^2) \cdot ((1-x^2) + x^2 \cdot u^2), \\ y = q \cdot \ln \frac{r}{r_0}. \end{cases}$$

Setzt man für u die Lösung der Differentialgleichung ein: $u = -cny$, so ergibt sich:

$$(48) \quad \begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1-cny}{(1+cny)+h \cdot (1-cny)}}, \\ y = q \cdot \ln \frac{r}{r_0}. \end{cases}$$

Läßt man k von $1/3$ gegen $1/\sqrt{3}$ wachsen, so steigt A in Formel (45), und demnach auch die Feldstärke in r_0 über alle Grenzen. Bezeichnen wir den Wert r , für den y gleich der halben Periode $2K$ der elliptischen Funktion $cn y$ wird, mit r_1 , so ist

$$r_1 = r_0 \cdot e^{\frac{2K}{q}}.$$

Läßt man die Feldstärke in r_0 über alle Grenzen wachsen, so wird zugleich auch q unendlich groß, während $2K$ endlich bleibt, es rückt demnach r_1 immer näher an r_0 heran; der Bereich, in welchem noch die gewöhnliche Elektrostatik gilt, wird somit für sehr große Feldstärken in dem Kugelkondensator schließlich unendlich klein.

Nehmen wir umgekehrt die Feldstärke sehr klein an, so berechnet sich die halbe Periode, die dem von 1 nur sehr wenig unterschiedenen Modul k entspricht, ziemlich genau nach der Formel:

$$2K = 2 \cdot \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Der Wert r_1 , für welchen $x = p \cdot \ln r/r_0$ gleich $2K$ wird, ist in diesem Falle, da $p = \frac{1}{2}$ wird:

$$r_1 = r_0 \cdot \left(\frac{16}{1-k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = r_0 \cdot \left(\frac{256}{(1-k^2)^2} \right).$$

Nähert sich k dem Wert 1, so wächst r_1 über alle Grenzen, der Bereich, in dem die elektrostatischen Gesetze bei sehr kleinen Feldstärken gelten, dehnt sich demnach ins Unendliche aus.

Wir können die bisher gewonnenen Resultate in dem folgenden Satze zusammenfassen:

In einem Kugelkondensator befolgt das elektrische Feld in der Nähe der Niveaufläche r_0 , auf welcher das Potential Null ist, mit einem sehr hohen Grad der Annäherung die Gesetze der gewöhnlichen Elektrostatik. Wie groß aber die Entfernung der beiden kugelförmigen Kondensatorflächen sein darf, ohne daß die vor den geladenen Flächen lagernden elektrischen Atmosphären merkbare Abweichungen von den gewöhnlichen elektrostatischen Gesetzen hervorrufen, hängt von der Feldstärke ab. Bei sehr schwachen Feldern wird der zulässige Abstand unbegrenzt groß,

mit zunehmender Feldstärke verringert er sich mehr und mehr und wird bei unendlich großer Feldstärke schließlich unendlich klein.

Da die elliptischen Funktionen periodisch sind, so nimmt das Integral (43) nicht nur für $r = r_0$ den Wert Null an, sondern noch an unendlich vielen anderen Stellen. Nullflächen des Potentials sind die Kugelschalen von den folgenden Radien:

$$\dots r_0 \cdot e^{-\frac{4\nu K}{p}}, r_0 \cdot e^{-\frac{4(\nu-1)K}{p}}, \dots r_0 \cdot e^{-\frac{8K}{p}}, r_0 \cdot e^{-\frac{4K}{p}},$$

$$r_0, r_0 \cdot e^{+\frac{4K}{p}}, r_0 \cdot e^{+\frac{8K}{p}}, \dots$$

Die Richtung des Feldes wechselt, geht es in einer Nullstelle in der positiven Richtung von r , so geht es in der nächsten in der negativen, in der übernächsten wieder in der positiven Richtung usf. Zwischen je zwei Nullstellen haben wir abwechselnd eine Kugelschale von positiv elektrischer Atmosphäre und eine von negativ elektrischer Atmosphäre. Die positiven und negativen Maxima der Ladungsdichte befinden sich ungefähr an den folgenden Stellen:

$$\dots r_0 \cdot e^{-\frac{(4\nu+2)K}{p}}, r_0 \cdot e^{-\frac{(4\nu-2)K}{p}}, \dots r_0 \cdot e^{-\frac{6K}{p}},$$

$$r_0 \cdot e^{-\frac{2K}{p}}, r_0 \cdot e^{+\frac{2K}{p}}, r_0 \cdot e^{+\frac{6K}{p}}, \dots$$

Die Potentiale an diesen Stellen sind:

$$\varphi_M = \pm \sqrt{\frac{b}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_M}},$$

wobei abwechselnd das positive und das negative Vorzeichen zu nehmen ist. Die beiden Kurven

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{b}{h^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

berühren beiderseits die wellenförmige Kurve des Potentials. Je näher man dem Nullpunkt kommt, um so mehr nehmen die Potentiale und demnach auch die Ladungsdichten der elektrischen Atmosphären zu. In der Nähe des Nullpunktes wachsen sie ins Unbegrenzte.

Das Integral (44) läßt sich demnach folgendermaßen beschreiben:

Das Zentrum ist von konzentrischen, kugelförmigen Schalen elektrischer Ladung, wie von Zwiebelschalen umhüllt. Und zwar wechseln positiv elektrische und negativ elektrische Schalen regelmäßig miteinander ab. Zwischen je zwei Schalen ist in der Nähe der Niveaufläche $\varphi = 0$ ein mehr oder weniger breites Gebiet, in welchem die elektrische Atmosphäre äußerst dünn ist, und in welchem daher ein elektrisches Feld besteht, wie es nach der gewöhnlichen Elektrostatik in einem Kugelkondensator sein soll. In der Nähe des Zentrums rücken die Zwiebelschalen dichter und dichter zusammen, indem gleichzeitig Ladungsdichte, Potential und das Feld zwischen je zwei Schalen ohne Grenze ansteigen.

Das Integral (44) hat also im Punkte $r = 0$ eine wesentliche Singularität, in der Weise, daß φ für $r = 0$ nicht etwa zu irgend einem endlichen oder unendlichen Wert hinstrebt, sondern vielmehr in der Nähe von $r = 0$ in sehr kurzen Intervallen zwischen unbegrenzt großen positiven und negativen Werten hin und her schwankt.

Auch der Punkt $r = \infty$ ist eine wesentliche Singularität der Funktion, obwohl φ für $r = \infty$ gegen Null konvergiert. Es liegen nämlich zwischen jedem beliebigen endlichen Wert von r und dem Wert $r = \infty$ immer noch unendlich viele positive und negative Maxima von φ , dadurch ist die Singularität von $r = \infty$ charakterisiert.

Will man sich etwa noch ein genaueres Bild von dem Verlauf des Integrals (44) machen, so ist dazu der Fall eines sehr kleinen Wertes von h gut geeignet. Man kann in diesem Falle die Funktion in ihrem ganzen Verlauf durch einfache elementare Rechenoperationen gewinnen.

Ich werde im folgenden setzen:

$$\dots r_0 \cdot e^{\frac{(2\nu-1) \cdot 2K}{p}} = r_{2\nu-1}, \quad r_0 \cdot e^{\frac{2\nu \cdot 2K}{p}} = r_{2\nu},$$

$$r_0 \cdot e^{\frac{(2\nu+1) \cdot 2K}{p}} = r_{2\nu+1}, \quad \dots$$

Die Reihe der Größen r_n ($n = 2\nu - 1, 2\nu, 2\nu + 1, \dots$) bildet eine geometrische Progression, da stets:

$$r_n : r_{n-1} = r_{n+1} : r_n = \dots = e^{\frac{2K}{p}}.$$

n darf gerade und ungerade, positive und negative Werte annehmen. Es gilt also allgemein:

$$r_n^2 = r_{n-1} \cdot r_{n+1}.$$

Führen wir nun die Annahme ein, daß h sehr klein gegen 1 ist, so können wir in den Formeln (42) die höheren Potenzen von h vernachlässigen, und mit folgenden Näherungen rechnen:

$$b = \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{h}{2}; \quad 1 - k^2 = 8h; \quad p = \frac{1}{2};$$

ferner können wir die halbe Periode der elliptischen Funktionen $2K$ berechnen als:

$$2K = \ln \frac{16}{1 - k^2} = \ln \frac{2}{h}.$$

Der Quotient der geometrischen Progression der r_n ist demnach $e^{\frac{2K}{p}} = 4/h^2$, eine sehr große Zahl, das heißt je zwei aufeinanderfolgende Werte in der Progression:

$$\dots r_{n-1}, \quad r_n, \quad r_{n+1}, \quad \dots$$

sind von ganz verschiedener Größenordnung. Gegenüber r_n ist r_{n-1} unendlich klein, r_{n+1} unendlich groß. Allgemein berechnet sich:

$$r_n = r_0 \cdot \left(\frac{4}{h^2}\right)^n,$$

wo n gerade oder ungerade, positiv oder negativ sein darf.

Mit Benutzung der Formel (45) bekommt man für das Potential φ in der Nähe eines Punktes $r_{2\nu}$:

$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{r_{2\nu}} \cdot \left(\frac{1}{r_{2\nu}} - \frac{1}{r}\right) = \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{r_{2\nu-1}} \cdot \left(\frac{1}{r_{2\nu}} - \frac{1}{r}\right).$$

Für einen Wert r , der sehr klein gegen $r_{2\nu}$, aber noch sehr groß gegen $r_{2\nu-1}$ ist, kann man einfacher rechnen:

$$\varphi = - \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu-1}}}{r},$$

für einen Wert r , der sehr groß gegen $r_{2\nu}$, aber noch sehr klein gegen $r_{2\nu+1}$ ist:

$$\varphi = + \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu-1}}}{r_{2\nu}} = \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu+1}}}.$$

Um nun φ in der Umgebung von $r_{2\nu+1}$ (und damit auch $r_{2\nu-1}$) zu berechnen, setze ich:

$$x' = p \cdot \ln \frac{r}{r_{2\nu+1}} = p \cdot \ln \frac{r}{r_0} - (2\nu+1) \cdot 2K = x - (2\nu+1) \cdot 2K.$$

Es ist nun:

$$cn x = -cn x', \quad dn x = +dn x',$$

also:

$$\varphi = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{r}} \cdot \sqrt{\frac{dn x' + cn x'}{(dn x' - cn x') + h \cdot (dn x' + cn x')}}.$$

Da wir die Glieder von höherer Ordnung als h vernachlässigen wollen, entwickeln wir $cn x'$ und $dn x'$ um $k^2 = 1$ herum als Potenzreihen in $(1 - k^2)$. Es ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (dn x')_{k^2} &= (dn x')_{k^2=1} \\ &+ \frac{1-k^2}{4} \cdot \left[\frac{sn^3 x'}{cn x'} + \frac{1}{2} \cdot sn x' \cdot cn x' \cdot \ln \frac{1+sn x'}{1-sn x'} \right]_{k^2=1} + \dots \\ (cn x')_{k^2} &= (cn x')_{k^2=1} \\ &- \frac{1-k^2}{4} \cdot \left[\frac{sn^3 x'}{cn x'} - \frac{1}{2} \cdot sn x' \cdot cn x' \cdot \ln \frac{1+sn x'}{1-sn x'} \right]_{k^2=1} + \dots \end{aligned}$$

Hierin ist einzusetzen:

$$\begin{aligned} (cn x')_{k^2=1} &= (dn x')_{k^2=1} = \frac{2}{e^{x'} + e^{-x'}}, \\ (sn x')_{k^2=1} &= \frac{e^{x'} - e^{-x'}}{e^{x'} + e^{-x'}}, \\ 1 - k^2 &= 8h. \end{aligned}$$

Unter Benutzung dieser Formeln ergibt eine ganz einfache Rechnung:

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu+1}}{r^2 + r_{2\nu+1}^2}}$$

Für kleine Werte von r :

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu+1}}}.$$

Für große Werte von r :

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu+1}}}{r}$$

In der Umgebung von $r_{2\nu-1}$ hat man, da hier das umgekehrte Vorzeichen herrschen muß:

$$\varphi = -\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu-1}}{r^2 + r_{2\nu-1}^2}}$$

Bei mehr und mehr wachsendem r durchläuft demnach φ der Reihe nach die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} & -\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu-1}}}; \quad -\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu-1}}{r_{2\nu-1}^2 + r^2}}; \quad -\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu-1}}}{r}; \\ & \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{r_{2\nu-1}} \cdot \left(\frac{1}{r_{2\nu}} - \frac{1}{r}\right); \quad +\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu+1}}}; \\ & +\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu+1}}{r_{2\nu+1}^2 + r^2}}; \quad +\sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu+1}}}{r}; \\ & \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{r_{2\nu+1}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{2\nu+2}}\right); \end{aligned}$$

20. II. Fall. $C < 0$. Ich bezeichne wieder mit γ die einzige positive Lösung der Gleichung dritten Grades:

$$\begin{aligned} -C + \gamma - \frac{4a}{3} \cdot \gamma^3 &= 0, \\ \gamma &> 0 \end{aligned}$$

und führe an Stelle von C als Integrationskonstante die folgende Größe h ein:

$$h = +\sqrt{\frac{-C}{-3C + 2\gamma}}$$

Ferner berechne ich wieder nach (42) die drei Größen b, k^2, p :

$$\begin{aligned} b &= h \cdot \sqrt{\frac{1 - h^2}{1 - 3h^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4a}}, \\ k^2 &= \frac{(1 - h)(1 - 3h)}{(1 + h)(1 + 3h)}, \\ p &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + h)(1 + 3h)}{1 - 3h^2}}. \end{aligned}$$

Ersetze ich nun v durch die folgendermaßen definierte Größe u :

$$v = b \cdot \frac{1 + k \cdot u}{(1 - k u) - h(1 + k \cdot u)},$$

so bekommt man im Falle $C < 0$ an Stelle der Gleichung (39) die folgende:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2), \\ x = p \cdot \ln \frac{r}{r_0}, \\ \varphi = \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \sqrt{\frac{1+k \cdot u}{(1-ku) - h \cdot (1+ku)}}. \end{array} \right.$$

Das Integral (49) ist nur dann reell, wenn

$$k^2 \geq 0.$$

Wir haben uns also lediglich auf den Bereich $0 < h < 1/3$ zu beschränken, wo diese Bedingung erfüllt ist. Setzt man nun für u das Integral $-cnx/dnx$ ein, so erhält man:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \frac{\sqrt{dnx - k \cdot cnx}}{\sqrt{(dnx + k \cdot cnx) - h(dnx - k \cdot cnx)}}, \\ x = p \cdot \ln \frac{r}{r_0}, \quad 0 < k < +1. \end{array} \right.$$

Das Charakteristische an diesem Integral ist, daß es im Gegensatz zu (44) niemals Null wird, denn es ist stets:

$$dnx > k \cdot cnx,$$

der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen bleibt also immer über Null. Wenn aber φ niemals durch Null hindurch geht, so muß es stets sein Vorzeichen beibehalten, es geht beständig von den sehr großen Werten bei kleinem r herunter bis zu den sehr kleinen Werten bei großem r . Dabei schwankt aber die periodische Funktion, die unter dem Wurzelzeichen steht, zwischen einem Maximum und einem Minimum regelmäßig hin und her. Das Maximum nimmt sie an für die Werte $x = (2\nu + 1) \cdot 2K$, also:

$$r = \dots r_0 \cdot e^{-\frac{(2\nu+1) \cdot 2K}{p}}, \quad r_0 \cdot e^{-\frac{(2\nu-1) \cdot 2K}{p}}, \quad \dots r_0 \cdot e^{-\frac{6K}{p}}, \\ r_0 \cdot e^{-\frac{2K}{p}}, \quad r_0 \cdot e^{+\frac{2K}{p}}, \quad r_0 \cdot e^{+\frac{6K}{p}}, \quad \dots$$

das Minimum für $x = 4\nu K$, also:

$$r = \dots r_0 \cdot e^{-\frac{4\nu \cdot K}{p}}, \quad r_0 \cdot e^{-\frac{4(\nu-1)K}{p}}, \quad \dots r_0 \cdot e^{-\frac{4K}{p}}, \quad r_0, \\ r_0 \cdot e^{+\frac{4K}{p}}, \quad r_0 \cdot e^{+\frac{8K}{p}}, \quad \dots$$

Die Werte des Maximums und des Minimums sind:

$$+ \sqrt{\frac{1+k}{(1-k)-h(1+k)}} \quad \text{und} \quad + \sqrt{\frac{1-k}{(1+k)-h(1-k)}}.$$

Die Werte des Potentials an den Stellen $r_{2\nu-1}$ (Maximum) und $r_{2\nu}$ (Minimum) betragen demnach:

$$\varphi_{2\nu-1} = \sqrt{\frac{b \cdot (1+k)}{(1-k)-h(1+k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu-1}}},$$

$$\varphi_{2\nu} = \sqrt{\frac{b \cdot (1-k)}{(1+k)-h(1-k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu}}}.$$

Infolge der Periodizität des Wurzelausdruckes erfolgt der Abfall der Größe φ mit wachsendem r nicht gleichmäßig, sondern stufenartig. Die beiden glatten Kurven:

$$\varphi = \sqrt{\frac{b(1+k)}{(1-k)-h(1+k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

und

$$\varphi = \sqrt{\frac{b(1-k)}{(1+k)-h(1-k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

berühren die staffelförmige Kurve des Potentials und begrenzen sie in dieser Weise beiderseits. Die Form der Kurve des Potentials kann man am besten im Falle eines kleinen h erkennen, wo man leicht eine Näherungsrechnung in ganz derselben Weise durchführen kann, wie wir es am Ende des Abschnittes 19. im Falle des positiven C getan haben. Setzen wir wieder:

$$r_0 \cdot e^{2\nu \cdot \frac{2K}{p}} = r_{2\nu}, \quad r_0 \cdot e^{(2\nu+1) \cdot \frac{2K}{p}} = r_{2\nu+1},$$

so erhalten wir bei kleinem h in der Nähe des Wertes $r_{2\nu}$:

$$\varphi = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{r_{2\nu-1}} \cdot \left(\frac{1}{r_{2\nu}} + \frac{1}{r} \right),$$

in der Nähe des Wertes $r_{2\nu+1}$:

$$\varphi = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu+1}}{r^2 + r_{2\nu+1}^2}}.$$

Mit wachsendem r durchläuft also φ der Reihe nach die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu-1}}}; \quad + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu-1}}{r_{2\nu-1}^2 + r^2}}; \quad + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu-1}}}{r}; \\
& + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{r_{2\nu-1}} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{2\nu}}\right); \quad + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_{2\nu+1}}}; \\
& + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{r_{2\nu+1}}{r_{2\nu+1}^2 + r^2}}; \quad + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{\sqrt{r_{2\nu+1}}}{r}; \\
& + \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{r_{2\nu+1}} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_{2\nu+2}}\right); \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Man sieht also, daß φ in einem Gebiet zwischen $r_{2\nu-2}$ und $r_{2\nu-1}$ ziemlich lange fast konstant auf einem Werte bleibt, bei $r_{2\nu-1}$ geht die φ -Kurve wieder deutlich abwärts und gleicht dann zwischen $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ eine Strecke lang ziemlich genau einer einseitigen Hyperbel, aber schon bei $r_{2\nu}$ verläuft die Kurve wieder flacher, geht zwischen $r_{2\nu}$ und $r_{2\nu+1}$ wieder in eine fast ganz horizontale Stufe über, zwischen $r_{2\nu+1}$ und $r_{2\nu+2}$ steigt sie dann wieder in Form einer weiter vorwärts gelegenen Hyperbel herab, und so fort.

Je näher man an $r = 0$ herankommt, um so häufiger werden die Stufen, schließlich unendlich häufig, deswegen ist auch in diesem Falle, obwohl φ für $r = 0$ eindeutig unendlich groß wird, der Punkt $r = 0$ eine *wesentliche* Singularität der Funktion. Ebenso ist $r = \infty$ eine *wesentliche* Singularität, weil zwischen jedem endlichen r und $r = \infty$ immer noch unendlich viele Stufen kommen.

Für größere Werte von h ist der Verlauf der Funktion im wesentlichen derselbe, wie in dem eben geschilderten Falle des unendlich kleinen h , nur schleifen sich die Stufen mehr und mehr ab, so daß man die im Falle des unendlich kleinen h deutlich hervortretenden verschiedenartigen Bereiche nicht mehr so gut unterscheiden kann. Wenn man schließlich $h = 1/3$, $h^2 = 0$ wählt, so verschwinden die Stufen völlig, die beiden auf p. 31 berechneten Grenzkurven, zwischen denen die staffelförmige Kurve des Potentials hin und her geht, fallen nun miteinander zusammen in der Kurve

$$\varphi = \sqrt{\frac{3b}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}},$$

die gleichzeitig die Potentialkurve ist. Nach der Definition von b (auf p. 29) ist

$$3b = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

das Integral φ lautet also, wenn man die willkürliche Konstante h gleich $1/3$ setzt:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt[4]{4a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Es ist also algebraisch, und die zweite willkürliche Konstante r_0 ist von selber herausgefallen.

In den praktisch realisierbaren Fällen liefert das Integral bei $C < 0$ die Felder in Kugelkondensatoren, deren beide Belegungen auf Potentiale von gleichem Vorzeichen aufgeladen sind. Sind die Potentiale niedrig, so kann man h klein wählen und das Feld im Innern des Kondensators durch die Formel

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{r_{2\nu-1}} \cdot \left(\frac{1}{r_{2\nu}} + \frac{1}{r} \right) = A + \frac{B}{r}$$

wiedergeben. Es ist das die Formel der gewöhnlichen Elektrostatik. Wenn man Potential und Feldstärke in einem Punkte des Kondensators gibt, also die Größen A und B , so kann man daraus sofort $r_{2\nu}$ und $r_{2\nu-1}$ berechnen, und aus $r_{2\nu}$ und $r_{2\nu-1}$ die Periode der Funktion, also auch den Modul h und r_0 . Mit dem Felde sind demnach zugleich auch die beiden Integrationskonstanten bekannt.

Die eben verwendete Formel gilt aber nur dann, wenn die Potentiale genügend klein sind. Mit großen Werten von φ sind so starke elektrische Atmosphären verbunden, daß dann die Formeln der gewöhnlichen Elektrostatik nicht mehr zu brauchen wäre. Es hat wohl kein Interesse, diese unrealisierbaren Fälle eingehender zu diskutieren.

21. III. Fall. $C = 0$. Wenn man die Gleichung (39):

$$\left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = v^2 - \frac{4a}{3} \cdot v^4$$

durch $4a/3 \cdot v^4$ dividiert und ferner setzt:

$$\sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{2v} = w,$$

so bekommt man:

$$\left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 = w^2 - 1.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$w = \frac{1}{2}(e^\xi + e^{-\xi}).$$

Setzt man nun ein:

$$w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{r \cdot \varphi^2}, \quad \xi = \ln \frac{r}{r_0},$$

so bekommt man:

$$(52) \quad \varphi = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{r_0^3}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}.$$

Wenn man also für die Integrationskonstante C den speziellen Wert 0 wählt, so fällt die wesentliche Singularität im Punkte $r = 0$ und zugleich auch im Punkte $r = \infty$ weg, das Integral hat nunmehr nur noch algebraische Singularitäten, für reelle Werte r sogar überhaupt keine Singularitäten.

Man kommt von dem in 19. besprochenen Integral (44) zu der Funktion (52), wenn man die Integrationskonstante h unter alle Grenzen sinken läßt. Es steigt dann der Modul k auf 1 und die Periode $4K$ wird unendlich groß. Die elektrische Kugelschale, die die Kugeloberfläche r_0 enthält, dehnt sich also nach beiden Seiten unbegrenzt aus. Einerseits schiebt sie die unendlich vielen Zwiebelschalen, die den Nullpunkt umgeben, in den Nullpunkt selbst hinein, so daß sie verschwinden, andererseits rückt die Niveauläche vom Potential Null vollständig ins Unendliche, so daß auch zwischen $r = r_0$ und $r = \infty$ keine Schalen elektrischer Ladung mehr vorhanden sein können.

Es sei der Wert des Potentials φ auf einer Kugel vom Radius R gegeben $\varphi = A$, dann haben wir zur Bestimmung der Integrationskonstante r_0 die Gleichung:

$$A^2 = \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot \frac{r_0}{R^2 + r_0^2},$$

$$r_0^2 - \frac{1}{A^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{a}} \cdot r_0 + R^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat nur dann reelle Lösungen, wenn:

$$\frac{3}{4a \cdot A^4} - R^2 > 0.$$

Das durch (52) dargestellte Feld ist also nur dann möglich, wenn auf einer Kugel vom Radius R das Potential A einen ganz bestimmten größten Wert nicht überschreitet:

$$A \leq \sqrt[4]{\frac{3}{4a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Die Gesetze der gewöhnlichen Elektrostatik bleiben nur dann gültig, wenn das Potential A im Vergleich zu diesem größtmöglichen Wert äußerst klein ist. Das ist der Fall, wenn:

$$\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot A^2 \cdot R = \varepsilon,$$

wo ε eine sehr kleine Zahl bedeutet. Man kann nun leicht Näherungswerte für r_0 berechnen, indem man ε^2 gegen 1 vernachlässigt. Die quadratische Gleichung liefert zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} 1. \quad r_0 &= \frac{1}{A^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{a}} = \frac{R}{\varepsilon}, \\ 2. \quad r_0 &= \sqrt{\frac{a}{3}} \cdot A^2 \cdot R^2 = \varepsilon \cdot R. \end{aligned}$$

Der erste Wert r_0 ist unendlich groß gegen R , im Innern der Kugel vom Radius R (also $r < R$) ist demnach das Potential, wenn man ε^2 gegen 1 streicht:

$$1. \quad \varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_0}} = A.$$

Der zweite Wert r_0 ist dagegen unendlich klein gegen R . Streicht man wieder ε^2 gegen 1, so bekommt man für alle Werte $r > R$:

$$2. \quad \varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{a}} \cdot \sqrt{r_0} \cdot \frac{1}{r} = A \cdot \frac{r_0}{r}.$$

Die erste Lösung gibt also in Übereinstimmung mit den Gesetzen der gewöhnlichen Elektrostatik das Feld im Innern einer Hohlkugel, die auf das Potential A geladen ist, die zweite Lösung gibt das äußere Feld derselben Kugel, wenn in einem unendlich großen Bereich in ihrer Umgebung keine Ladungen mehr vorhanden sind. Benutzt man die genaue Formel, ohne ε^2 zu vernachlässigen, so kann man die schwache

elektrische Atmosphäre berechnen, die nach unserer Theorie sowohl innerhalb, wie außerhalb der Kugel vorhanden sein muß.

22. Wir wollen uns mehrere konzentrische Kugeln von den Radien R_1, R_2, R_3, R_4 denken, die auf die Potentiale A_1, A_2, A_3, A_4 geladen sein sollen. Zwei Integrale mit $C=0$ liefern das Feld im Innern der kleinsten Kugel und das Feld im Außenraum um die größte Kugel. In den Kugelschalen zwischen den einzelnen Kugeln hat man Integrale mit $C > 0$ oder $C < 0$ zu nehmen. Solange die Potentiale A_1, A_2, A_3, A_4 sämtlich genügend klein sind, bekommt man eine sehr gute Annäherung an die Formeln der gewöhnlichen Elektrostatik, und die Abweichungen davon sind unmerklich klein. Wir sehen also in diesem speziellen Fall den auf p. 18 allgemein ausgesprochenen Satz bestätigt, daß sich Funktionen Φ angeben lassen, bei denen man mit der gewöhnlichen Elektrostatik nicht in Konflikt kommt.

Wir müssen nun aber die Frage beantworten, wie man es sich zu denken habe, daß geladene Kugelflächen R_1, R_2, R_3, R_4 auftreten können, die als Unstetigkeitsflächen je zwei Räume voneinander trennen, in denen verschiedene Integrale für φ zu nehmen sind. Natürlich kann die Ladung auf einer solchen Kugelfläche nicht gleichmäßig verteilt sein. Denn wir haben die für zentrische Symmetrie geltende Differentialgleichung (37) ganz allgemein gelöst und es gibt unter ihren Integralen keines, das für die Werte R_1, R_2, R_3, R_4 Diskontinuitäten haben könnte, wie sie den Flächenladungen entsprechen würden. Die Integrale, die auf den beiden Seiten einer solchen Diskontinuitätsfläche gelten, müssen demnach beide innerhalb einer sehr dünnen Schicht an der Fläche sehr schnell, aber natürlich doch kontinuierlich in eine und dieselbe dritte Lösung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung übergehen, die nun nicht mehr zentrisch symmetrisch sein darf. Es ist wohl ohne weiteres klar, daß diese Lösung in der geladenen Fläche irgend einer atomistischen Verteilung der Ladung entsprechen muß. *Es ist interessant zu bemerken, daß die von mir untersuchte Theorie somit überhaupt nicht die Wahl zwischen einer kontinuierlichen und einer atomistischen Struktur der Ladungen läßt, sondern daß sie nur dann vollständig durchführbar ist, wenn sie selber zu irgendwelchen Elektrizitätsatomen führt.*

Das Problem des Elektrons.

23. Auf den ersten Blick scheint das im vorigen Kapitel diskutierte Beispiel einer Weltfunktion recht günstig gewählt zu sein, weil es in der Tat zu isolierten Knotenstellen der elektrischen Ladung führt. Wählen wir nämlich in der Formel (52):

$$\varphi = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot r_0^2}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}$$

die Integrationskonstante r_0 gegen alle meßbaren Längen unendlich klein, etwa von der Größenordnung, die man im allgemeinen dem Elektronenradius zuschreibt, so stellt φ das Potential in der Umgebung einer winzig kleinen elektrischen Knotenstelle dar, deren Atmosphäre in meßbaren Entfernungen vom Zentrum praktisch vollkommen Null ist. Da die Ladungsdichte ρ durch die Gleichung (36) $\rho = a \cdot \varphi^5$ gegeben ist, so haben wir:

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{3 r_0^2}{a}} \cdot \frac{3 r_0^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2)^5}}$$

Die gesamte Ladung der Knotenstelle e ergibt sich hieraus durch Integration zu:

$$(53) \quad e = 4 \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{3 r_0^2}{a}}$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Ladung der gesamten Atmosphäre der Knotenstelle außerhalb einer Kugel vom Radius r_1 den Betrag hat:

$$e \cdot \left(1 - \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_0^2}}\right)^3\right)$$

Es ist das, wenn r_1 groß gegen r_0 ist, nur ein verschwindend kleiner Bruchteil von e ; die Ladung ist also in der Tat praktisch ganz auf eine kleine Kugel beschränkt.

Allerdings liefert die Theorie kein Elementarquantum der Ladung, denn wenn man in (53) die willkürliche Konstante r_0 variiert, so kann man alle möglichen Beträge für e bekommen, und zwar kann e ebensogut positives, wie negatives Vorzeichen haben. Die „Elektronen“, die man bei der angenommenen Weltfunktion bekommt, sind also nicht unteilbar. Es können

mehrere Knotenstellen zu einer einzigen größeren verschmelzen, und es kann eine einzige Knotenstelle in mehrere kleinere zerfallen, da ja Knotenstellen mit allen möglichen Ladungen existenzfähig sind.

Obwohl diese Eigentümlichkeit nicht mit den wirklich beobachteten Tatsachen übereinstimmt, könnte man doch vielleicht zunächst noch meinen, daß sich eine Theorie der Materie, die auf die als Beispiel angenommene Weltfunktion aufgebaut ist, vollständig durchführen ließe, da die elektrische Ladung eines großen Körpers als an diskreten Knotenstellen haftend gedacht werden könnten, wenn diesen auch nicht die Eigenschaft der Unteilbarkeit zukäme. Indessen ist das ein Irrtum. Nach Formel (52) und (53) ist das Potential in genügend großer Entfernung von der Knotenstelle stets gegeben als: $\varphi = e/4\pi r$. Gleichgewicht herrscht in dem Felde der Knotenstelle also nur dann, wenn sie in einem Raum liegt, der das Potential Null hat. Es gibt unter all den Integralen der Gleichung (37) kein einziges, das eine Knotenstelle in einem Raum von einem beliebigen von Null verschiedenen Potential φ_0 darstellte, so daß wir in großer Entfernung von der Knotenstelle hätten: $\varphi = e/4\pi r + \varphi_0$, wo φ_0 eine von Null verschiedene Konstante bedeutete. Es können demnach nicht mehrere Knotenstellen nebeneinander im Gleichgewicht sein, wie es in einem materiellen Körper der Fall sein müßte. Vielmehr muß dann immer sofort eine Neuordnung der Ladungen beginnen. Haben zwei nebeneinander liegende Knotenstellen gleiches Vorzeichen, so werden sie sich zu einer einzigen größeren Knotenstelle zu vereinigen suchen, wodurch ein Gleichgewicht erreicht wurde. Dagegen könnten zwei Knotenstellen von verschiedenem Vorzeichen überhaupt nicht nahe beieinander bleiben, sie müssen weiter und weiter voneinander fliehen, um in Räume vom Potential Null zu kommen. Eine Welt, die durch die Weltfunktion

$$\Phi = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a \cdot \chi^6$$

regiert würde, müßte sich also schließlich zu zwei großen Klumpen elektrischer Ladungen zusammenballen, einem positiven und einem negativen, und diese beiden Klumpen müßten immer weiter und weiter voneinander wegstreben.

24. Wir haben in der allgemeinen Diskussion der Gleichgewichtsbedingung erkannt (p. 16 und 17), daß es ein Integral mit *einer* willkürlichen Konstanten gibt, das im Punkte $r=0$ keine Singularität hat, und eines auch mit *einer* Willkürlichkeit, das sich im Punkte $r=\infty$ regulär verhält. Im allgemeinen entsprechen diese beiden Integrale zwei *verschiedenen* Werten der zweiten willkürlichen Konstanten, die das allgemeine Integral noch enthält, sie sind völlig voneinander verschieden und enthalten als einzigen gemeinsamen Spezialfall die selbstverständliche Lösung $\varphi = 0$.

In dem von uns durchdiskutierten Beispiel zeigte sich aber die Besonderheit, daß die beiden eben besprochenen Integrale miteinander identisch waren. Wenn man nämlich der willkürlichen Konstanten C (p. 19 und 33) den Wert Null gab, so fielen aus dem allgemeinen Integral die beiden wesentlichen Singularitäten in $r=0$ und $r=\infty$ *gleichzeitig* weg. Das ist der Grund, weswegen das Beispiel wohl Knotenstellen, aber kein Elementarquantum ergab, und zugleich, weswegen die Knotenstellen nur in einem Raume vom Potential $\varphi = 0$ im Gleichgewicht sein konnten. Wahrscheinlich hängt das Zusammentreffen des Wegfalls beider Singularitäten damit zusammen, daß die Differentialgleichung (37) auf p. 19 reduzibel ist, d. h., daß sie sich bei einmaliger Integration in eine *algebraische* Differentialgleichung erster Ordnung verwandelt. Weltfunktionen, die zu derartigen Integralen führen, sind also nicht zu brauchen.

Würden wir eine Weltfunktion von der Form

$$\Phi = -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{\nu} a \cdot \chi^\nu$$

untersuchen, wo ν eine beliebige von 6 verschiedene gerade Zahl, größer als 4, bedeuten soll, so würden wir (außer $\varphi = 0$) keine Lösung ohne wesentliche Singularität finden. Das Feld in dem unendlichen Außenraum um eine geladene Kugel würde dann durch eine Lösung dargestellt, die in $r=0$ eine wesentliche Singularität hätte, und die Lösung, die für das Innere einer geladenen Hohlkugel zu nehmen wäre, verhielte sich in $r=\infty$ nicht regulär. Bei dieser Wahl der Weltfunktion fänden wir überhaupt keine Lösung, die eine isolierte kugelförmige Knotenstelle von endlicher Ladung darstellte.

Wir werden das in einem der folgenden Abschnitte ganz streng nachweisen. Weltfunktionen von dieser Form sind also für uns samt und sonders nicht zu gebrauchen.

Wenn sich überhaupt die Theorie durchführen lassen wird, so muß die Weltfunktion jedenfalls eine kompliziertere Form haben. Das Elektron wird wahrscheinlich durch eine Lösung der Gleichgewichtsbedingung (34) dargestellt werden, die im Punkte $r=0$ eine Singularität hat, welche funktionentheoretisch als wesentliche Singularität zu bezeichnen wäre, die aber doch keine physikalisch sinnlosen Werte für φ ergäbe. Eine solche Singularität hätte beispielsweise die Funktion

$$\varphi = a + b \cdot e^{-\frac{1}{r}} \text{ für } r = 0.$$

Die Differentialgleichung (34) müßte also unter all den Integralen, die in $r=0$ eine wesentliche Singularität haben, eines liefern, dessen Singularität nicht mit physikalischer Sinnlosigkeit verbunden wäre. Dieses Integral müßte noch *eine* Willkürlichkeit enthalten, die man so wählen könnte, daß φ in sehr großer Entfernung vom Zentrum einen als konstant anzusehenden, beliebig vorgeschriebenen Wert annimmt: das Potential des Raumes, in dem sich das Elektron befindet. Für $r=\infty$ wird dieses Integral im allgemeinen eine wesentliche Singularität haben, die nur in dem Falle, wo das Potential des umgebenden Raumes Null ist, entweder wegfallen muß, oder doch nicht physikalisch sinnlos sein darf.

Obwohl es also noch nicht gelungen ist, eine Weltfunktion zu finden, die wirklich zu einem Elektron führt, so ist andererseits doch die Möglichkeit nicht zu leugnen, daß es eine derartige Weltfunktion gibt. Ich werde im folgenden deswegen zunächst einfach die Voraussetzung machen, daß eine Weltfunktion Φ vorläge, welche zu Knotenstellen elektrischer Ladungen führt von der Art, wie wir sie in den Elektronen haben. Ich werde in einer demnächst erscheinenden Fortsetzung dieser Untersuchungen die Dynamik derartiger Knotenstellen, ihre träge Masse und die Kraftwirkungen, die sie erfahren, berechnen.

Greifswald, Physik. Inst., 1. Juni 1912.

(Eingegangen 7. Juni 1912.)