

5. *Grundlagen einer Theorie der Materie;*
von Gustav Mie.

Erste Mitteilung.

Einleitung.

1. Was die in neuerer Zeit gewonnenen Erfahrungstatsachen über das Wesen der Atome aussagen, ist im wesentlichen doch immer nur etwas Negatives, nämlich, daß in ihrem Innern die Gesetze der Mechanik und die Maxwellschen Gleichungen nicht gelten können. Was man aber an die Stelle dieser Gleichungen zu setzen habe, um die Fülle der merkwürdigen Tatsachen, die man mit dem Namen des Wirkungsquantums verknüpft, ferner die Gesetze der Atomspektren und so weiter von einem Standpunkte aus zusammen zu überblicken, darüber sagt uns die experimentelle Erfahrung nichts. Ich glaube, daß man etwas Derartiges vom Experiment allein auch gar nicht erwarten darf. Experiment und Theorie müssen sich gegenseitig in die Hand arbeiten und das ist nicht möglich, solange die Theorie keine Basis hat, auf die sie sich stellen kann.

Es scheint mir also für den weiteren Fortschritt unserer Erkenntnis unbedingt notwendig zu sein, der Theorie von der Materie eine neue Grundlage zu schaffen. Ich habe im folgenden mit dieser Arbeit einen Anfang zu machen versucht, aber man darf bei der Schwierigkeit des Gegenstandes nicht erwarten, daß sich gleich experimentell greifbare Resultate einstellen. Die nächsten Ziele, die ich mir gesteckt habe, sind: die Existenz des unteilbaren Elektrons zu erklären, und: die Tatsache der Gravitation mit der Existenz der Materie in einem notwendigen Zusammenhang zu sehen. Ich glaube, daß man hiermit beginnen muß, denn die elektrischen und die Gravitationswirkungen sind sicher die unmittelbarsten Äußerungen der Kräfte, auf denen die Existenz der Materie überhaupt beruht. Es wäre sinnlos, Materie zu denken, deren

kleinste Teilchen nicht elektrische Ladungen haben, ebenso sinnlos aber Materie ohne Gravitation. Erst, wenn die beiden genannten Ziele erreicht sind, wird man daran denken können, die komplizierteren Erscheinungen, von denen ich oben sprach, mit der Theorie in Zusammenhang zu bringen. Aber zur Erreichung der beiden ersten Ziele ist noch ein weiter Weg und ich kann im folgenden nur Vorarbeiten veröffentlichen, die uns vielleicht auf diesen Weg bringen werden.

Die Grundannahme meiner Theorie ist, daß auch im Innern der Elektronen elektrische und magnetische Felder auftreten. Die Elektronen und demnach überhaupt die kleinsten Teilchen der Materie sind nach dieser Auffassung also mit dem Weltäther nicht wesensverschieden, sie sind nicht, wie man sich das vielleicht vor zwanzig Jahren dachte, Fremdkörper im Äther, sondern sie sind nur Stellen, wo der Äther einen ganz besonderen Zustand angenommen hat, den wir durch das Wort elektrische Ladung bezeichnen. Allerdings bringt die enorme Intensität der Feld- und Ladungszustände an der Stelle selber, die wir als Elektron bezeichnen, es mit sich, daß hier die gewöhnlichen Maxwell'schen Gleichungen mit mehr gelten. Das Verhalten des elektromagnetischen Feldes im Elektron wird vermutlich sehr fremdartig sein, wenn man die Gesetze des „reinen Äthers“ dagegen hält. Aber, wenn wir überhaupt von einem elektromagnetischen Feld im Innern des Elektrons sprechen können, so wäre es nicht zu verstehen, wenn nicht vom Verhalten des „reinen“ Äthers bis zum Verhalten des Äthers im Innern des Elektrons ein kontinuierlicher Übergang möglich sein sollte. In meiner Theorie ist deswegen das Elektron kein scharfbegrenztes Raumteilchen im Äther, sondern es besteht aus einem Kern, der kontinuierlich in eine Atmosphäre von elektrischer Ladung übergeht, die sich bis ins Unendliche erstreckt, aber schon ganz nahe am Kern so außerordentlich dünn wird, daß man sie auf keine Weise experimentell bemerken kann. Ein Atom ist eine Zusammenballung einer größeren Zahl von Elektronen, die durch eine verhältnismäßig dünne Ladung von entgegengesetztem Vorzeichen verkittet sind. Die Atome sind wahrscheinlich von kräftigeren Atmosphären umgeben, die allerdings immer noch so dünn sind, daß sie keine bemerkbaren

elektrischen Felder veranlassen, die sich aber vermutlich in den Gravitationswirkungen geltend machen.

Man wird vielleicht denken, daß man mit der eben formulierten Grundannahme wenig anfangen könne. Sie führt aber immerhin zu einer allgemeinen Form für die Grundgleichungen der Ätherphysik, wenn man noch zwei weitere Annahmen hinzunimmt. Die erste ist, daß das Relativitätsprinzip allgemeine Gültigkeit haben soll, die zweite, daß die bisher bekannten Zustände des Äthers, nämlich elektrisches Feld, magnetisches Feld, elektrische Ladung, Ladungsstrom, vollständig ausreichen, um alle Erscheinungen in der materiellen Welt zu beschreiben. Die Berechtigung der ersten Annahme ist wohl außer Zweifel. Ob aber die zweite beizubehalten sein wird, läßt sich nicht von vornherein sagen. Man muß es zunächst probieren. Läßt sich mit ihr eine Theorie gewinnen, die die materielle Welt richtig wiedergibt, so ist sie damit gerechtfertigt. Im anderen Fall wird man die Frage aufzuwerfen haben, wie das System der fundamentalen Größen zu erweitern sei.

Ich werde im folgenden zunächst die Überlegungen, die mich von den gemachten drei Annahmen zu einer allgemeinen Form für die Äthergleichungen geführt haben, ziemlich ausführlich darstellen, um dadurch womöglich eine Diskussion darüber anzuregen, ob die Form, die ich annehme, die einzig mögliche sei, oder ob nicht vielleicht auch noch andere Grundgleichungen der Ätherphysik mit den drei Annahmen vereinbar sind. Ich gestehe, daß es mir nicht gelungen ist, andere Möglichkeiten aufzufinden. Daß ich das Prinzip von der Erhaltung der Energie als richtig voraussetze und die Energie als eine lokalisierbare Größe annehme, ist wohl selbstverständlich.

Erstes Kapitel.

Die Feldgleichungen.

Allgemeine Form der Feldgleichungen.

2. Wenn man sich die Maxwell'schen Gleichungen ansieht, am besten in der Form, die Minkowski ihnen gegeben hat, so erkennt man sofort, daß der vierdimensionale Sechservektor „elektromagnetische Feldstärke“ für sich allein nicht

genügen kann, um die Vorgänge in Raum und Zeit vollständig zu beschreiben. Denn in den Maxwellschen Gleichungen tritt außerdem noch ein selbständiger Vierervektor auf, der „Viererstrom“, der also mindestens noch hinzugenommen werden muß, um die Beschreibung vollständig zu machen.

Nach unserer Auffassung stellt die Zeitkomponente des Viererstromes, die Ladungsdichte ρ , eine eigentümliche Beschaffenheit des Weltäthers dar, die er in merkbarer Größe nur an einzelnen Stellen annimmt, und die es mit sich bringt, daß an diesen Stellen die Linien des elektrischen Feldes \mathfrak{d} einfach erlöschen, daß also $\text{div } \mathfrak{d}$ von Null verschieden ist. Wir können demnach den Wert von $\text{div } \mathfrak{d}$ als Maß für den neuen Ätherzustand nehmen:

$$\rho = \text{div } \mathfrak{d}.$$

Ebenso beschreibt die Raumkomponente des Viererstromes, der Ladungsstrom \mathfrak{v} , ein eigentümliches Verhalten des Äthers, das nur an einzelnen Stellen eine bemerkbare Stärke gewinnt, und das ein Auftreten von Wirbelstellen im magnetischen Feld \mathfrak{h} mit sich bringt, die nicht durch eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes \mathfrak{d} kompensiert sind. Wir können daher die Differenz $\text{rot } \mathfrak{h} - \mathfrak{d}$ als Maß für den den neuen Ätherzustand benutzen:

$$\text{rot } \mathfrak{h} - \mathfrak{d} = \mathfrak{v}.$$

3. Wir machen nun von unseren in 1. aufgeführten Grundannahmen Gebrauch. Sollen sich durch das „elektromagnetische Feld“ und den „Viererstrom“ zusammen alle Vorgänge in der materiellen Welt beschreiben lassen, so muß es nach dem Kausalitätsprinzip für die zehn Komponenten der Zustandsgrößen \mathfrak{d} , \mathfrak{h} , ρ , \mathfrak{v} zehn Differentialgleichungen geben, deren linke Seite immer ein Differentialquotient erster Ordnung nach der Zeit von einer dieser zehn Größen oder einer Funktion von ihnen ist, während auf der rechten Seite eine Funktion der Größen und ihrer räumlichen Differentialquotienten steht. Nur durch ein solches System von Gleichungen ist aus der in *einem* Moment gegebenen Verteilung der Ätherzustände immer die im nächsten Moment, nach Ablauf einer unendlich kleinen

Zeit dt , eintretende Verteilung bestimmt, also das Kausalitätsprinzip erfüllt.

Soll weiter das Relativitätsprinzip gelten, so müssen die Differentialquotienten in diesen Gleichungen sich als vektorielle Differentialoperatoren von vierdimensionalen Größen schreiben lassen. Dadurch wird die Zahl der Möglichkeiten ganz enorm eingeschränkt. Man sieht z. B. sofort, daß auch nach den Koordinaten nur Differentialquotienten erster Ordnung vorkommen können, daß alle Differentialquotienten nur in der ersten Potenz eintreten usw.

Endlich muß noch gefordert werden, daß die Gleichungen im „reinen“ Äther in die Maxwellschen Gleichungen übergehen, da zwischen reinem Äther und Materie ein allmählicher Übergang angenommen wird. Außerdem muß die Existenz von wahren magnetischen Ladungen ausgeschlossen werden, man muß also zur Charakterisierung des magnetischen Feldes eine Größe \mathfrak{b} benutzen können, die überall die Eigenschaft hat: $\text{div } \mathfrak{b} = 0$. Wir kommen dann zu den Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{h} - \mathfrak{v},$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = - \text{rot } \mathfrak{e}$$

und zwar muß im reinen Äther \mathfrak{b} identisch mit \mathfrak{h} , \mathfrak{e} identisch mit \mathfrak{b} werden. Im Innern der Materie können dagegen \mathfrak{e} und \mathfrak{b} komplizierte Funktionen von \mathfrak{b} , \mathfrak{h} , ρ , \mathfrak{v} sein. Die Gleichungen (1) und (2) gleichen dann nur ganz äußerlich den Maxwellschen Gleichungen. Da sie wenigstens zur Hälfte nicht mehr linear sind, so sind die Gesetze des Feldes im Innern der Atome völlig andere als im reinen Äther, es kann dort beispielsweise keine elektromagnetischen Wellen geben, deren Existenz lineare Gleichungen voraussetzt u. dergl. mehr.

Wir werden im folgenden also streng unterscheiden zwischen den beiden „Intensitätsgrößen“: elektrische Feldstärke \mathfrak{e} und magnetische Induktion \mathfrak{b} , und den „Quantitätsgrößen“: elektrische Verschiebung \mathfrak{d} und magnetische Feldstärke \mathfrak{h} . Nur im reinen Äther gilt das Superpositionsprinzip elektromagnetischer Felder, das wir durch die Gleichungen $\mathfrak{e} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$ ausdrücken werden.

In den Symbolen der vierdimensionalen Vektoranalysis¹⁾ lauten die beiden Gleichungen (1) und (2) folgendermaßen:

$$(1a) \quad \Delta \iota v (\mathfrak{h}, -i\mathfrak{b}) = (v, i\varrho),$$

$$(2a) \quad \Delta \iota v (e, i\mathfrak{b}) = 0.$$

Es handelt sich nun noch um die vier dem Vierervektor $(v, i\varrho)$ entsprechenden Gleichungen. Für einen Vierervektor gibt es zweierlei vierdimensionale Differentialoperatoren erster Ordnung, nämlich die Operatoren Div und Rot.²⁾ Beim ersten Operator wird die Zeitkomponente, beim zweiten werden die drei Raumkomponenten nach t differenziert. Wir müssen also diese beiden Operatoren anwenden, um die vier noch fehlenden Differentialgleichungen zu gewinnen. Der Operator Div tritt auf in der bekannten Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } v = 0.$$

Denn in der vierdimensionalen Schreibweise lautet sie:

$$(3a) \quad \text{Div}(v, i\varrho) = 0.$$

Die noch fehlenden Gleichungen müssen in einer Formel:

$$\text{Rot}(f, i\varphi) = \mathfrak{F}$$

enthalten sein, wo $(f, i\varphi)$ ein Vierervektor ist, der zu $(v, i\varrho)$ in einer ähnlichen Beziehung steht, wie der Sechservektor $(\mathfrak{b}, -i\mathfrak{e})$ zu $(\mathfrak{h}, -i\mathfrak{b})$. Wir wissen zunächst nur so viel, daß f und φ irgendwelche Funktionen aller Zustandsgrößen sind, die zusammen einen Vierervektor bilden. Die rechte Seite der Gleichung \mathfrak{F} ist irgend ein Sechservektor, ebenfalls eine Funktion der Zustandsgrößen, von dem nur das eine bekannt ist, daß er die Bedingung

$$\Delta \iota v \mathfrak{F}^* = 0$$

erfüllen muß³⁾, weil er sonst nicht durch die Operation Rot aus einem Vierervektor zu gewinnen sein könnte. Diese Be-

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip p. 70. Friedr. Vieweg & Sohn. 1911.

2) M. Laue, l. c. p. 70.

3) M. Laue, l. c. p. 71.

dingung muß nun aber weiter, wenn wir nicht annehmen wollen, daß $\mathfrak{F} = \text{const.}$, wo sie dann allerdings eine Identität wäre, identisch sein mit Gleichung (2a). Denn wäre das nicht der Fall, so hätten wir außer den zehn Differentialgleichungen, die nach dem Kausalitätsprinzip für die zehn Zustandsgrößen nötig sind, noch drei überzählige. Der zeitliche Verlauf der Vorgänge im Äther wäre dann überbestimmt, was natürlich unmöglich ist. Wir müssen also notwendigerweise setzen: Entweder $\mathfrak{F} = \text{const.}$ oder: $\mathfrak{F} = C \cdot (\mathfrak{b}, -i\epsilon)$, wo C einen willkürlichen konstanten Faktor bedeutet. Diesen Faktor können wir auf die andere Seite unserer Gleichung $\text{Rot}(\mathfrak{f}, i\varphi) = \mathfrak{F}$ bringen und in $\mathfrak{f}, i\varphi$ aufnehmen, wir setzen also einfach $\mathfrak{F} = (\mathfrak{b}, -i\epsilon)$. Die drei Gleichungen, die einen Differentialquotienten nach der Zeit t enthalten, lauten demnach allgemein so:

$$-\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \nabla \varphi + C \cdot \epsilon + c,$$

wo C entweder Null oder Eins ist und c einen im ganzen Raum-Zeitgebiet konstanten Vektor bedeutet. In einem Gebiet im reinen Äther, wo $\mathfrak{f} = 0$ und auch $\epsilon = 0$ ist, müßte sein: $\nabla \varphi = -c$. Obwohl hier also alle Zustandsgrößen konstant gleich Null sind, hätte φ , das doch eine Funktion der Zustandsgrößen sein soll, einen von Null verschiedenen Gradienten, es wäre nicht konstant. Das ist unmöglich, es muß also sein: $c = 0$. Andererseits läßt sich leicht zeigen, daß C von Null verschieden sein muß. Wenn in der Umgebung eines mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Elektrons alle Ätherzustände im Gleichgewicht sind, so müssen alle Differentialquotienten nach der Zeit Null sein. Die Gleichung lautet dann:

$$\nabla \varphi + C \cdot \epsilon = 0.$$

Wäre nun $C = 0$, so wäre auch $\nabla \varphi = 0$, also $\varphi = \text{const.}$ Die Größe φ hinge demnach überhaupt von den Feldgrößen gar nicht ab, dasselbe folgte nach dem Relativitätsprinzip dann auch für \mathfrak{f} , und die aufgestellte Gleichung fiel in eine Identität zusammen. Es muß also sein $C = 1$. Die letzten drei Gleichungen der Ätherdynamik sind demnach:

$$(4) \quad -\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \nabla \varphi + \epsilon,$$

oder in vierdimensionalen Symbolen geschrieben:

$$(4a) \quad \text{Rot}(f, i\varphi) = (b, -ie).$$

In dem Ausdruck (4a) stecken noch die folgenden drei Gleichungen, die keinen Differentialquotienten nach der Zeit enthalten:

$$(4b) \quad \text{rot } f = b.$$

Man sieht leicht, daß sich die Gleichungen (4b) aus (4) mit Hilfe von (2) ableiten lassen, sie enthalten also nichts Neues.

Wenn in der Umgebung eines ruhenden oder mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten Elektrons alles im Gleichgewicht ist, so lautet die Gleichung (4):

$$\nabla \varphi + e = 0.$$

Wir können dies als *die Gleichgewichtsbedingung* des Feldes in der Umgebung des Elektrons bezeichnen. Sie läßt sich anschaulich deuten als die Aussage, daß die beiden Kräfte e und $\nabla \varphi$ einander entgegengesetzt gleich sein sollen. Die elektrische Feldstärke e sucht die Ladung des Elektrons nach außen zu ziehen und sie über einen möglichst großen Raum auszubreiten, sie stellt also die der Materie innewohnende *Expansivkraft* dar. Ihr entgegen wirkt die *Kohäsionskraft* $\nabla \varphi$, die sich als Gradient eines der elektrischen Ladung an sich eigentümlichen Kohäsionsdruckes φ ¹⁾ berechnet. Expansivkraft und Kohäsionskraft sind die beiden Wirkungen, auf denen die Existenz der Materie überhaupt beruht, sie müssen also in jeder möglichen Theorie der Materie vorkommen.

Die Gleichung (4) läßt sich als die Bewegungsgleichung des Ladungsstromes bezeichnen. Der Vektor f ist die dem Ladungsstrom v entsprechende *Bewegungsgröße*. In der gewöhnlichen Mechanik ist die Bewegungsgröße bekanntlich Masse mal Geschwindigkeit und wird gemessen durch den Stoß, der zur Hervorbringung der Geschwindigkeit nötig ist. Da nun Bewegungsgröße und Druck als „Intensitätsgrößen“ zu bezeichnen sind, das heißt als Größen, die man durch Kraft-

1) Einen derartigen Druck hat bekanntlich zuerst H. Poincaré angenommen (Compt. rend. 140. p. 1504. 1905). Vgl. auch H. Th. Wolff, Ann. d. Phys. 36. p. 1066. 1911.

wirkungen mißt, so wollen wir auch φ und f als „Intensitätsgrößen“ den ihnen zugeordneten „Quantitätsgrößen“ ρ und v entgegenstellen.

Wir können also den Zustand des Äthers entweder durch zehn Quantitätsgrößen (b, h, ρ, v) oder durch zehn Intensitätsgrößen (e, b, φ, f) beschreiben.

4. Die sechs Differentialgleichungen (4) und (4b), die in (4a) in eine Formel zusammengefaßt sind, sind genau dieselben wie die Differentialgleichungen des sogenannten Viererpotentials, das aus dem skalaren Potential φ und dem Vektorpotential f zusammengesetzt ist. Man könnte deswegen mit einer gewissen Berechtigung sagen, daß die hier entwickelte Theorie einfach darin bestehe, daß sie den beiden Potentialen φ und f die Bedeutung von physikalischen Zuständen des Weltäthers beilegt, nämlich als Kohäsionsdruck und Bewegungsgröße.

Wir müssen dabei aber noch eine wichtige Bemerkung hinzufügen. Es ist bekannt, daß die Lösung der Gleichungen (4a) bei gegebenem Sechservektor ($b, -ie$) noch unbestimmt ist, wenn man nicht für $\text{Div}(f, i\varphi)$ noch eine Annahme macht. In der Elektrizitätstheorie definiert man nun die beiden Potentiale dadurch, daß man einfach $\text{Div}(f, i\varphi) = 0$ setzt. Diese Gleichung gilt aber für die in unserer Theorie angenommenen Ätherzustände nicht, und sie sind deswegen im allgemeinen mit den gewöhnlich berechneten Potentialen nicht identisch. An die Stelle der eben hingeschriebenen Gleichung der Elektrizitätstheorie tritt nämlich in unserer Ätherdynamik die Gleichung (3): $\text{Div}(v, i\rho) = 0$. Diese kann nicht mit der anderen Gleichung zusammen bestehen, weil dann der zeitliche Verlauf der Äthervorgänge durch elf Gleichungen beherrscht würde, also überbestimmt wäre, was unmöglich ist. Wir haben deswegen im allgemeinen $\text{Div}(f, i\varphi) \neq 0$. In einem späteren Abschnitt (p. 534) werden wir für die Größe $\text{Div}(f, i\varphi)$ noch eine einfache Deutung finden.

Im Fall der Ruhe ($v = 0, h = 0$) ist die Größe φ wirklich mit dem elektrostatischen Potential identisch, weil dann die Gleichung gilt:

$$e + \nabla \varphi = 0.$$

5. Wenn wir φ mit einem Druck vergleichen und ρ mit einer Dichtigkeit, so könnte man leicht denken, daß es vorteilhaft sein möchte, diesen Größen immer positive Werte zuzulegen, ähnlich wie es in der Physik der Gase geschieht.

Wir würden dann dem reinen Äther, wo er ganz frei von Feldern ist, einen konstanten positiven Wert ρ_0 , die Normaldichte, beilegen, bei beliebiger Wahl des Raum-Zeitkoordinatensystems, müßte es natürlich ein Vierervektor $(v_0, i\rho_0)$ sein, der im ganzen Raum-Zeitgebiet konstant wäre. Elektrische und magnetische Felder würden nur da auftreten, wo ρ und v von ρ_0 und v_0 verschiedene Werte annehmen und die Gleichungen (1) und (3) würden deswegen folgendermaßen lauten müssen:

$$\Delta i v(\mathfrak{h}, -i\mathfrak{b}) = ((v - v_0), i(\rho - \rho_0)),$$

$$\text{Div}((v - v_0), i(\rho - \rho_0)) = 0.$$

Man könnte nun natürlich ρ_0 so wählen, daß die in diesen Gleichungen vorkommende Größe ρ , die „Ätherdichte“, immer positiv wäre. Es ist aber nicht einzusehen, was das für einen Vorteil bringen sollte. Ich werde deswegen im folgenden an Stelle von $v - v_0$ und $\rho - \rho_0$ stets wieder einfach v und ρ setzen, also mit positiven und negativen Dichten rechnen, indem ich im reinen Äther die Dichte gleich Null setze.

Ganz dasselbe gilt für den Kohäsionsdruck φ . Da φ und f in den Grundgleichungen der Ätherphysik nur nach Zeit oder Ort differenziert vorkommen, so kann man sie um eine ganz beliebige von Zeit und Ort unabhängige Größe φ_0, f_0 vermehren, ohne daß dadurch an der Beschreibung der Vorgänge im wesentlichen etwas geändert würde. Man könnte beispielsweise einen so großen Wert φ_0 nehmen, daß $\varphi_0 - \varphi$ immer positiv bleibt. Die Gleichgewichtsbedingung wäre dann:

$$e - \nabla(\varphi_0 - \varphi) = 0.$$

Im reinen Äther hätten wir nun den großen positiven Druck φ_0 , im Elektron den kleineren Druck $(\varphi_0 - \varphi)$ und e hielte dem Druckgefälle $-\nabla(\varphi_0 - \varphi)$, das der Äther auf das Elektron ausübt, das Gleichgewicht. In der Tat spricht H. Poincaré (l. c.) von einem Druck, den das Elektron von außen erfährt. Ich glaube aber, daß es für die Darstellung einfacher ist, wenn

wir den Nullpunkt des Druckes in den reinen Äther legen, und werde deshalb immer so rechnen, daß φ in unendlicher Entfernung vom Elektron gleich Null zu setzen sei.

Ebenso wollen wir auch für die Energie, der man ja bekanntlich immer eine beliebige additive Konstante hinzufügen kann, den Nullpunkt so festsetzen, daß die Energiedichte im reinen, feldfreien Äther gleich Null ist. Ebenso wie ρ und φ wird dann allerdings auch die Energiedichte W ebensogut negative, wie positive Werte annehmen können; es liegt ja aber nicht der geringste Grund vor, der uns zwänge, W immer positiv zu setzen.

Nach diesen Festsetzungen sind nun ρ , φ , W als vollständig bestimmte Größen ohne jede additive Willkür anzusehen.

Die Energie.

6. Ich setze voraus, daß nicht allein das Prinzip von der Erhaltung der Energie, sondern auch das Prinzip von der Lokalisierbarkeit der Energie und der Energieübertragung¹⁾ gilt. Das heißt: Bezeichnen wir die Dichte der Energie mit W , den Energiestrom mit \mathfrak{s} , so muß aus den Feldgleichungen (1) bis (4) die folgende Beziehung folgen:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathfrak{s},$$

wo sowohl der Skalar W , als auch der Vektor \mathfrak{s} universelle Funktionen der in dem betreffenden Raumzeitpunkt herrschenden Zustände sind. Man kann zu dieser Energiegleichung aus den Feldgleichungen nur auf *eine* Weise kommen: Man muß Faktoren f , l , m , n bestimmen, die universelle Funktionen der Zustandsgrößen sind, mit ihnen die Gleichungen (1) bis (4) multiplizieren, darauf die Gleichungen addieren. Es muß nun also möglich sein, die Faktoren f , l , m , n so zu bestimmen, daß dann auf der linken Seite ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit zustande kommt, und auf der rechten eine Divergenz.

1) G. Mie, Wiener Sitzungsber. 107. Abt. IIa. p. 1117 u. 1126. 1898.

Wir wollen nun die Bedingungen dafür untersuchen, daß dies geht.

$$\begin{aligned} & \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} + \mathfrak{l} \cdot \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + m \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t} + n \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} \\ &= \mathfrak{f} \cdot \text{rot } \mathfrak{h} - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} - \mathfrak{l} \cdot \text{rote} - m \cdot \text{div } \mathfrak{v} - n \cdot \nabla \varphi - n \cdot \mathfrak{e}. \end{aligned}$$

Zunächst ist zu sehen, daß die beiden Glieder $-\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v}$ und $-n \cdot \mathfrak{e}$, die reine universelle Funktionen der Zustandsgrößen sind, wegfallen müssen, weil $\text{div } \mathfrak{s}$ nur aus Gliedern zusammengesetzt sein kann, die Differentialquotienten nach den Koordinaten enthalten. Es muß also sein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} &= u \cdot \mathfrak{e}, \\ n &= -u \cdot \mathfrak{v}, \end{aligned}$$

wo u wieder eine universelle Funktion der Zustandsgrößen ist. Eine kleine Umrechnung ergibt nun für die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} & \text{div}(u \cdot [\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{e}]) + \text{div}(u \cdot \varphi \cdot \mathfrak{v}) + (u \cdot \mathfrak{h} - \mathfrak{l}) \cdot \text{rote} - \mathfrak{h} \cdot [\mathfrak{e} \cdot \nabla u] \\ & - (m + u \cdot \varphi) \cdot \text{div } \mathfrak{v} - \varphi \cdot (\mathfrak{v} \cdot \nabla u). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann im allgemeinen nur dann eine Divergenz sein, wenn die letzten vier Summanden wegfallen, wenn also:

$$\begin{aligned} \nabla u &= 0, \\ u \cdot \mathfrak{h} - \mathfrak{l} &= 0, \\ m + u \cdot \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt $u = \text{const.}$, und zwar ist der Wert dieser Konstante dadurch bestimmt, daß der Ausdruck für den Energiestrom im reinen Äther in den bekannten Poyntingschen Ausdruck $[\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h}] = [\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{h}]$ übergehen muß. Daraus folgt:

$$u = 1, \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{h}, \quad m = -\varphi, \quad n = -\mathfrak{v}.$$

Wir haben also für die Energiegleichung gefunden:

$$\mathfrak{e} \cdot \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} + \mathfrak{h} \cdot \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} - \varphi \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t} - \mathfrak{v} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = -\text{div}([\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{h}] - \varphi \cdot \mathfrak{v}).$$

Der Ausdruck für den *Energiestrom* in der allgemeinen Ätherdynamik ist also:

$$(5) \quad \mathfrak{s} = [\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{h}] - \varphi \cdot \mathfrak{v}.$$

7. Das Energieprinzip verlangt nun weiter, daß der Ausdruck auf der linken Seite der Energiegleichung ein vollständiges Differential ist. Wir müssen also die Bedingung dafür aufstellen, daß:

$$(6) \quad e \cdot db + h \cdot dh - \varphi \cdot d\rho - v \cdot df = dW$$

ein vollständiges Differential sei, daß sich also W als eine Funktion von (b, h, ρ, v) bestimmen lasse. Ebensoviel als W können wir der Untersuchung eine Größe H unterwerfen, die durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$(7) \quad W = H + h \cdot b - v \cdot f.$$

Ist W eine Funktion von (b, h, ρ, v) , so ist es auch H und umgekehrt. Aus (6) und (7) ergibt sich der folgende Ausdruck für das Differential von H :

$$(8) \quad dH = e \cdot db - b \cdot dh - \varphi \cdot d\rho + f \cdot dv,$$

wo e, b, φ, f Funktionen von (b, h, ρ, v) sind. Wir wollen nun der Kürze halber für einen Vektor, dessen Komponenten

$$\frac{\partial H}{\partial b_x}, \quad \frac{\partial H}{\partial b_y}, \quad \frac{\partial H}{\partial b_z}$$

sind, einfach $\partial H / \partial b$ sagen, analog in ähnlichen Fällen. Dann folgt aus (8) ohne weiteres:

$$(9) \quad e = \frac{\partial H}{\partial b}, \quad b = -\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \varphi = -\frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad f = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

Die Bedingung dafür, daß das Energieprinzip gilt, ist, daß sich alle Intensitätsgrößen e, b, φ, f mit Hilfe einer einzigen Funktion der Quantitätsgrößen $H(b, h, \rho, v)$ berechnen lassen, die wir die Hamiltonsche Funktion nennen wollen. Und zwar ist jede Intensitätsgröße als der Differentialquotient von H nach der entsprechenden Quantitätsgröße zu gewinnen, in zwei Fällen (b und φ) mit dem negativen Vorzeichen.

Auch die Energiedichte W kann man nun aus der Hamiltonschen Funktion allein finden. Denn (7) ergibt unter Benutzung von (9):

$$(10) \quad W = H - \frac{\partial H}{\partial h} \cdot h - \frac{\partial H}{\partial v} \cdot v.$$

Aus der Form der Grundgleichungen der Ätherdynamik (1) bis (4) ergibt sich, wenn man die Gleichungen (9) berücksichtigt, sofort der folgende Satz:

Das Relativitätsprinzip ist für alle physikalischen Vorgänge gültig, sobald die Hamiltonsche Funktion $H(b, h, \varrho, v)$ für die Lorentz'sche Transformation invariant ist.

Wir hätten nun also die Gleichungen der Ätherdynamik vollständig aufgestellt, wenn wir nur wüßten, was für eine Form die universelle Funktion H hat. Diese Form zu finden, ist nun allerdings eine äußerst schwierige Aufgabe.

Das Problem einer Theorie der Materie ist zurückgeführt auf das Problem, die universelle Funktion $H(b, h, \varrho, v)$ zu finden.

Bisher wissen wir über H nur eines: im reinen Äther gilt das Superpositionsprinzip der elektromagnetischen Felder mit großer Genauigkeit; wenn man also aus H einen Summanden $(b^2 - h^2)/2$ ausscheidet:

$$H = \frac{1}{2}(b^2 - h^2) + H_1,$$

so muß der Rest H_1 an Stellen, wo ϱ sehr klein ist, ganz verschwindend klein gegen das erste Glied sein. Im Innern der Atome dagegen, wo ϱ groß ist, wird H_1 bei weitem überwiegen, so daß hier die Gesetze der Felder ganz andere sind, als im reinen Äther.

8. Für die Rechnung ist es im allgemeinen weit bequemer, die Intensitätsgrößen (e, b, φ, f) als die unabhängigen Variablen zu nehmen, durch die der Zustand des Äthers beschrieben wird, und die Quantitätsgrößen (b, h, ϱ, v) als Funktionen von ihnen anzusehen.

Wir wollen nun die folgende Funktion Φ bilden:

$$(11) \quad \Phi(e, b, \varphi, f) = H - (e \cdot b - b \cdot h) + (\varphi \cdot \varrho - f \cdot v),$$

indem wir aus den Gleichungen (9) zunächst die Größen b, h, ϱ, v als Funktionen von e, b, φ, f berechnen und die gefundenen Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung (11) substituieren. Wir bekommen dann unter Benutzung von (8) für das Differential von Φ folgenden Ausdruck:

$$(12) \quad d\Phi = -b \cdot de + h \cdot db + \varrho \cdot d\varphi - v \cdot df.$$

Daraus folgt:

$$(13) \quad b = -\frac{\partial \Phi}{\partial e}, \quad h = \frac{\partial \Phi}{\partial b}, \quad \varrho = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial f}.$$

Die Quantitätsgrößen δ , h , ρ , v lassen sich alle mit Hilfe einer einzigen Funktion der Intensitätsgrößen $\Phi(e, \delta, \varphi, f)$ berechnen, indem man diese nach den entsprechenden Intensitätsgrößen differenziert. In zwei Fällen (δ und v) hat man dem Differentialquotienten das negative Vorzeichen zu geben.

Die Energiedichte W ergibt sich aus Φ folgendermaßen:

$$(14) \quad W = \Phi + e \cdot \delta - \varphi \cdot \rho = \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial e} \cdot e - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \varphi.$$

Die Hamiltonsche Funktion H berechnet sich nach (11):

$$(15) \quad H = \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial e} \cdot e - \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} \cdot \delta - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial f} \cdot f.$$

Anstatt die universelle Funktion $H(\delta, h, \rho, v)$ zu suchen, kann man auch nach der universellen Funktion $\Phi(e, \delta, \varphi, f)$ forschen.

Ich werde Φ oft kurzweg als die Weltfunktion bezeichnen.

Für die Lorentzsche Transformation muß Φ ebenso wie H eine Invariante sein.

Ähnlich wie H , läßt sich auch Φ in zwei Teile zerlegen:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\delta^2 - e^2) + \Phi_1,$$

von denen der erste im reinen Äther, der zweite im Innern der Atome überwiegt.

9. Mit Hilfe der Weltfunktion läßt sich eine vier×vier-reihige Matrix¹⁾ bilden, die den Energiestrom und die Maxwell'schen Ätherspannungen für unsere allgemeine Ätherdynamik enthält:

$$(16) \quad S = \begin{vmatrix} \Phi - \delta h + e_x \delta_x + h_x h_x + f_x v_x, & e_x \delta_y + h_x h_y + f_x v_y, \\ e_x \delta_z + h_x h_z + f_x v_z, & -i \cdot (\delta_y h_z - \delta_z h_y - \rho f_x), \\ e_y \delta_x + h_y h_x + f_y v_x, & \Phi - \delta h + e_y \delta_y + h_y h_y + f_y v_y, \\ e_y \delta_z + h_y h_z + f_y v_z, & -i \cdot (\delta_z h_x - \delta_x h_z - \rho f_y), \\ e_z \delta_x + h_z h_x + f_z v_x, & e_z \delta_y + h_z h_y + f_z v_y, \\ \Phi - \delta h + e_z \delta_z + h_z h_z + f_z v_z, & -i \cdot (\delta_x h_y - \delta_y h_x - \rho f_z), \\ -i \cdot (e_y h_z - e_z h_y - \varphi \cdot v_x), & -i \cdot (e_z h_x - e_x h_z - \varphi \cdot v_y), \\ -i \cdot (e_x h_y - e_y h_x - \varphi \cdot v_z), & \Phi + e \delta - \varphi \cdot \rho \end{vmatrix}$$

1) H. Minkowski, Zwei Abhandlungen, B. G. Teubner 1910. p. 36

Führt man an der untersten Zeile der Matrix die Operation

$$\Delta \iota v = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{i \cdot \partial t}$$

aus, so bekommt man die Energiegleichung, wenn man den so gewonnenen Ausdruck gleich Null setzt:

$$\operatorname{div}([\epsilon \cdot \mathfrak{h}] - \varphi \cdot \mathfrak{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\Phi + \epsilon \cdot \mathfrak{d} - \varphi \cdot \rho) = 0,$$

denn nach (14) ist $\Phi + \epsilon \cdot \mathfrak{d} - \varphi \cdot \rho = W$. Aus dem Relativitätsprinzip folgt dann ohne weiteres:

$$(17) \quad \Delta \iota v S = 0.$$

Übrigens lassen sich die drei Gleichungen, die den drei ersten Zeilen von S entsprechen, auch ohne große Mühe direkt aus den Feldgleichungen (1) bis (4) gewinnen.

Auf die Frage, ob die Matrix (16) zur Diagonale symmetrisch ist oder nicht, werden wir später (p. 533) noch einmal zurückkommen.

Das Hamiltonsche Prinzip.

10. Ob im vorhergehenden einwandsfrei nachgewiesen sei, daß nur die von mir aufgestellte Form der Feldgleichungen möglich sei, darüber läßt sich vielleicht noch diskutieren. Es scheint mir deswegen von Wert zu sein, zu zeigen, daß man die Feldgleichungen durch ganz einfache mathematische Operationen erhalten kann, wenn man die Gültigkeit des Hamiltonschen Prinzips voraussetzt.

Ich mache also nur die folgenden beiden Annahmen: Erstens der Zustand des Äthers ist vollständig charakterisiert durch die Größen $\mathfrak{d}, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}$, und zwar sind die beiden letzten durch die Bedingungsgleichungen definiert:

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{h} - \mathfrak{d};$$

zweitens die Äthervorgänge erfüllen das im folgenden formulierte Hamiltonsche Prinzip.

Das Hamiltonsche Prinzip. Es gibt eine Funktion $H(\mathfrak{d}, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v})$, deren Integral über irgendein bestimmt begrenztes Raum-Zeitgebiet bei allen wirklichen Vorgängen ein Maximum

ist, wenn man die Zustandsgrößen in allen Punkten im Innern des Gebietes variiert, auf der Begrenzung des Gebietes aber nicht.

$$(18) \quad \int_G \delta H(b, h, \rho, v) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = 0.$$

Auf der Begrenzung des Gebietes G gilt:

$$\delta b = \delta h = \delta \rho = \delta v = 0.$$

Man kann zeigen, daß das Relativitätsprinzip gilt, wenn H für die Lorentzsche Transformation invariant ist. Nehmen wir an, daß dies der Fall ist, und ersetzen wir die Größen b, h, ρ, v durch die bekannten Ausdrücke in b', h', ρ', v' , die bei einer Transformation vom Koordinatensystem (x, y, z, t) in ein anderes (x', y', z', t') an ihre Stelle zu treten haben, so müssen wir eine Funktion $H'(b', h', \rho', v')$ bekommen, die aus den neuen Variablen (b', h', ρ', v') genau ebenso zusammengesetzt ist, wie H aus den alten Variablen (b, h, ρ, v) . Wir drücken das dadurch aus, daß wir setzen: $H' = H$. Es sei nun G' das Gebiet im neuen Koordinatensystem (x', y', z', t') , in das G durch die Transformation übergeht. Es ist dann:

$$\int_{G'} H(b', h', \rho', v') \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot dt' = \int_G H(b, h, \rho, v) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Gilt das Hamiltonsche Prinzip für das Koordinatensystem (x, y, z, t) , so folgt aus dieser Gleichung, daß es auch für jedes beliebige andere (x', y', z', t') gilt. Und zwar ist die Hamiltonsche Funktion in allen Koordinatensystemen dieselbe Funktion H .

Die Naturgesetze, d. h. die Differentialgleichungen, die sich aus dem Hamiltonschen Prinzip ergeben, sind demnach in allen Koordinatensystemen, zu denen man durch die Lorentzsche Transformation kommt, die gleichen. Das ist das Relativitätsprinzip.

Wir wollen nun die Feldgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip herleiten. Zu dem Zweck bilden wir die Variation:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial b} \cdot \delta b + \frac{\partial H}{\partial h} \cdot \delta h + \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \delta \rho + \frac{\partial H}{\partial v} \cdot \delta v.$$

Wir wollen nun die folgenden Abkürzungen einführen:

$$(19) \quad \frac{\partial H}{\partial b} = \epsilon, \quad \frac{\partial H}{\partial h} = -\eta, \quad \frac{\partial H}{\partial \rho} = -\varphi, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = \zeta.$$

Die Variation von H ist dann:

$$(20) \quad \delta H = e \cdot \delta \mathfrak{b} - \mathfrak{b} \cdot \delta \mathfrak{h} - \varphi \cdot \delta \varrho + \mathfrak{f} \cdot \delta \mathfrak{v}.$$

Zur weiteren Umformung dieses Ausdruckes benutzen wir eine Formel aus der vierdimensionalen Vektorenrechnung, die wir kurz herleiten wollen: Als das Produkt aus dem Vierervektor $\mathbf{P} = (\mathfrak{f}, i\varphi)$ und dem Sechservektor $\mathfrak{F} = (\mathfrak{h}, -i\mathfrak{b})$ bezeichnen wir den folgenden Vierervektor¹⁾:

$$[\mathbf{P} \cdot \mathfrak{F}] = ([\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \mathfrak{b}, i \cdot (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b})).$$

Von diesem Vektor bilden wir die Div:

$$\text{Div}[\mathbf{P} \cdot \mathfrak{F}] = \text{div}\{[\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \mathfrak{b}\} + \frac{\partial(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b})}{\partial t}.$$

Nun ist:

$$\text{div}[\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] = \mathfrak{h} \cdot \text{rot} \mathfrak{f} - \mathfrak{f} \cdot \text{rot} \mathfrak{h},$$

$$\text{div}(\varphi \cdot \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \text{div} \mathfrak{b},$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b})}{\partial t} = \mathfrak{b} \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} + \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t}.$$

Demnach ist:

$$(21) \quad \begin{cases} \text{div}\{[\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \mathfrak{b}\} + \frac{\partial(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b})}{\partial t} = \mathfrak{h} \cdot \text{rot} \mathfrak{f} + \mathfrak{b} \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} \right) \\ \quad \quad \quad - \mathfrak{f} \cdot \left(\text{rot} \mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} \right) + \varphi \cdot \text{div} \mathfrak{b}. \end{cases}$$

In vierdimensionalen Symbolen lautet diese Formel so:

$$(22) \quad \text{Div}[\mathbf{P} \cdot \mathfrak{F}] = -(\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{Rot} \mathbf{P}) - (\mathbf{P} \cdot \Delta \mathfrak{v} \mathfrak{F}).$$

Wir wollen nun diese Formel auf unser Problem anwenden. Dabei ist noch zu bemerken, daß:

$$\text{rot} \mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \mathfrak{v}, \quad \text{div} \mathfrak{b} = \varrho.$$

Es ist also:

$$\text{Div}[\mathbf{P} \cdot \mathfrak{F}] = \mathfrak{h} \cdot \text{rot} \mathfrak{f} + \mathfrak{b} \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} \right) - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} + \varphi \cdot \varrho.$$

Setzen wir an Stelle von \mathfrak{b} und \mathfrak{h} die Variationen $\delta \mathfrak{b}$ und $\delta \mathfrak{h}$, so bekommen wir hieraus:

$$\mathfrak{f} \cdot \delta \mathfrak{v} - \varphi \cdot \delta \varrho = \text{rot} \mathfrak{f} \cdot \delta \mathfrak{h} + \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} \right) \cdot \delta \mathfrak{b} - \text{Div}[\mathbf{P} \cdot \delta \mathfrak{F}].$$

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip. p. 67.

Nun läßt sich das Integral:

$$\int_G \text{Div} [P \cdot \delta \mathfrak{F}] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt,$$

genau ebenso wie das Raumintegral über eine dreidimensionale Divergenz in ein Integral über die Begrenzung des Gebietes G umwandeln. Da aber im Hamiltonschen Prinzip vorge-schrieben ist, daß auf der Begrenzung die Variationen aller Zustandsvariablen, also auch $\delta \mathfrak{F}$, Null sind, so ist:

$$\int_G \text{Div} [P \cdot \delta \mathfrak{F}] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = 0.$$

Folglich ergibt sich, wenn man für δH die Formel (20) benutzt:

$$\begin{aligned} & \int_G \delta H \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \\ &= \int_G \left((e + \nabla \varphi + \frac{\partial f}{\partial t}) \cdot \delta b + (\text{rot } f - b) \cdot \delta h \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt. \end{aligned}$$

Da nun zwischen b und h keine Bedingungsgleichungen mehr bestehen und folglich δh und δb ganz unabhängig voneinander sind, so kann das Hamiltonsche Prinzip nur erfüllt sein, wenn die folgenden beiden Differentialgleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} e + \nabla \varphi + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0, \\ \text{rot } f - b &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt ferner noch:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \text{rot } e = 0.$$

Da nun die Definitionsgleichungen (19) für e, b, φ, f völlig übereinstimmen mit den Gleichungen (9), so sind diese Gleichungen identisch mit den Feldgleichungen (2) und (4), die Gleichungen (1) und (3) haben wir als Definitionsgleichungen von vorn-herin angenommen.

Damit ist bewiesen, daß die von mir angenommene Form der Feldgleichungen die einzige ist, die mit dem Hamilton-schen Prinzip in Einklang steht.

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß man der Gleichung (21) noch eine interessante Form geben kann, wenn man bedenkt daß:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{f} = \mathfrak{b}, \quad \nabla \varphi + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = -\mathfrak{e}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{h} - \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \mathfrak{v}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{b} = \rho.$$

Wir erhalten so mit Rücksicht auf Gleichung (11):

$$(23) \quad \frac{\partial(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b})}{\partial t} + \operatorname{div}\{[\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}] + \varphi \cdot \mathfrak{b}\} = \Phi - H.$$

Die Invarianten.

11. Soll die Funktion $H(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v})$ für die Lorentzsche Transformation invariant, d. h. soll sie ein vierdimensionaler Skalar sein, so muß sie eine Funktion von lauter vierdimensionalen Skalaren sein, die sich aus $\mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \rho, \mathfrak{v}$ bilden lassen. Es gibt vier derartige Größen, die voneinander unabhängig sind.

1. Der absolute Betrag des Vierervektors $\mathfrak{P} = (\mathfrak{v}, i\rho)$. Er ist:

$$\sigma = \sqrt{\rho^2 - \mathfrak{v}^2} = \rho \cdot \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{\rho}.$$

2. Der absolute Betrag des Sechservektors $\mathfrak{F} = (\mathfrak{h}, -i\mathfrak{b})$. Wir wollen von ihm das Quadrat nehmen:

$$p = \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{h}^2.$$

3. Das skalare Produkt des Sechservektors $\mathfrak{F} = (\mathfrak{h}, -i\mathfrak{b})$ mit seinem dualen Vektor $\mathfrak{F}^* = (-i\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$. Wir wollen dieses Produkt mit $i/2$ multiplizieren, dann bekommen wir die Größe:

$$q = (\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{b}).$$

4. Durch Multiplikation des Vierervektors \mathfrak{P} mit dem Sechservektor \mathfrak{F} und mit seinem dualen \mathfrak{F}^* bekommt man zwei neue Vierervektoren:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F} = ((\rho \cdot \mathfrak{b} + [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}]), -i \cdot (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b})),$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F}^* = (i(\rho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}]), (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})).$$

Die Quadrate ihrer absoluten Beträge sind:

$$A^2 = (\rho \cdot \mathfrak{b} + [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}])^2 - (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b})^2,$$

$$B^2 = -(\rho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}])^2 + (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})^2.$$

Diese beiden Größen sind nicht mehr unabhängig voneinander, denn es läßt sich leicht einsehen, daß:

$$A^2 + B^2 = (\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{b}^2) \cdot (v^2 - \varrho^2) = \sigma^2 \cdot p.$$

Ebenso liefert auch das skalare Produkt von beiden nichts Neues mehr:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) &= i((\varrho \cdot \mathfrak{b} + [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}])(\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}]) - (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})) \\ &= -i \cdot (\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{b}) \cdot (v^2 - \varrho^2) = i \cdot \sigma^2 \cdot q. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit nur noch *einen* vierten Skalar, und zwar wollen wir dazu die Größe $s = -B^2$ wählen:

$$s = (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}])^2 - (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})^2.$$

Aus der Theorie der vierdimensionalen Vektoren läßt sich beweisen, daß es keine weiteren unabhängigen Skalare geben kann, ich will den Beweis hier aber weglassen.

Wir haben demnach folgende vier unabhängige Variablen als möglich gefunden:

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma = \sqrt{\varrho^2 - v^2} = \varrho \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{\varrho^2}}, \\ p = \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{h}^2, \\ q = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h}), \\ s = (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}])^2 - (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})^2. \end{cases}$$

12. Die Intensitätsgrößen $e, \varphi, \mathfrak{b}, \mathfrak{f}$ berechnen sich nun folgendermaßen:

$$(25) \quad \begin{cases} e = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \mathfrak{b} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \mathfrak{h} + 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot [\mathfrak{v} \cdot (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}])], \\ \varphi = -\frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\varrho}{\sigma} - 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}]) \cdot \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{b} = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \mathfrak{h} - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \mathfrak{b} - 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot (\varrho \cdot (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}]) - \mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})), \\ \mathfrak{f} = -\frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{v}{\sigma} - 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \cdot ([\mathfrak{b} \cdot (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}])] + \mathfrak{h} \cdot (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})). \end{cases}$$

Beachten wir, daß:

$$(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}) = \frac{1}{\varrho} \cdot (\mathfrak{v} \cdot (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}])),$$

so erkennen wir sofort, daß in den vier Ausdrücken (25) der Faktor von $\partial H/\partial s$ verschwindet, wenn:

$$\varrho \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}] = 0.$$

Machen wir weiter die Annahme, daß in dem Felde eines ruhenden Elektrons $\mathfrak{b} = 0$ ist, so muß $\partial H/\partial q$ entweder den Faktor q oder den Faktor s haben, weil es sonst nicht für $\mathfrak{v} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ verschwinden würde; nun ist aber

$$q = (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}) = \frac{1}{\varrho} \cdot (\mathfrak{b} \cdot (\varrho \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \mathfrak{b}])).$$

Demnach wird $\partial H/\partial q$ unter derselben Bedingung gleich Null, wie der Faktor von $\partial H/\partial s$, nämlich wenn:

$$\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}] = 0.$$

Nun bekommt man aber die Größe: $\varrho' \cdot \mathfrak{h}' = \varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}]$, wenn man auf die Ätherzustände eine Lorentzsche Transformation anwendet, bei der sich das eine Koordinatensystem im anderen mit der Geschwindigkeit $q = v/\varrho$ bewegt. Ist q in Raum und Zeit konstant, so kann man auf Ruhe transformieren, dann ist $\mathfrak{h}' = 0$, d. h.: Bei einer stationären Bewegung ist die eben hingeschriebene Bedingung erfüllt.

Wenn wir die Annahme machen, daß im Felde eines ruhenden Elektrons nicht nur \mathfrak{v} und \mathfrak{h} , sondern auch \mathfrak{b} und \mathfrak{f} überall Null sind, so fallen bei stationären Bewegungen aus den Intensitätsgrößen alle Glieder heraus, die ihr Dasein den Invarianten q und s verdanken.

Da sich nun bisher alle Erfahrungen an Elektronen und an Materie überhaupt nur auf quasistationäre Bewegungen beziehen, und es keinen Zweck hat, die Untersuchungen durch Beibehalten von Größen zu belasten, die auf die Resultate voraussichtlich keinen Einfluß haben, so werden wir im folgenden die vereinfachende Annahme machen, daß q und s in H überhaupt nicht vorkommen.

13. Hypothese. Die Hamiltonsche Funktion H hängt nur von den beiden Invarianten σ und p ab.

Wir haben dann für die Intensitätsgrößen die folgenden sehr einfachen Ausdrücke:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} e = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} = 2 \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \mathfrak{h}, \\ \varphi = - \frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\varrho}{\sigma}, \quad \mathfrak{f} = - \frac{\partial H}{\partial \sigma} \cdot \frac{\mathfrak{v}}{\sigma}. \end{array} \right.$$

Jeder der Intensitätsvektoren e, h, \dot{f} ist mit dem ihm entsprechenden Quantitätsvektor δ, \dot{h}, v gleichgerichtet, außerdem bestehen die beiden Proportionen:

$$\dot{f}:v = \varphi:\varrho, \quad \delta:\dot{h} = e:\delta.$$

Daraus folgt ohne weiteres der Satz: Die Weltmatrix (16) ist symmetrisch zur Diagonale.

Ebenso wie H , hängt nun natürlich auch Φ nur von zwei Variablen ab, wir wollen dafür die folgenden beiden Größen nehmen:

$$(27) \quad \begin{cases} \chi = \sqrt{\varphi^2 - \dot{f}^2}, \\ \eta = \sqrt{e^2 - \delta^2}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{\dot{f}}{\varphi} = q,$$

so können wir auch schreiben:

$$(27a) \quad \chi = \varphi \cdot \sqrt{1 - q^2}.$$

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man für die Größe:

$$\text{Div}(\dot{f}, i\varphi) = \text{div} \dot{f} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

eine interessante Deutung finden kann. Ich will zur Abkürzung setzen:

$$-\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H}{\partial \sigma} = \psi.$$

Dann ist:

$$\varphi = \psi \cdot \varrho, \quad \dot{f} = \psi \cdot v,$$

also:

$$\text{div} \dot{f} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi \cdot \left(\text{div} v + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right) + (v \cdot \nabla \psi) + \varrho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Nun ist

$$\text{div} v + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

und wir können ferner setzen: $v = \varrho \cdot q$, wo wir q als die *Geschwindigkeit* deuten können, mit der sich die Ladung gerade an der betreffenden Stelle verschiebt. Es ist dann:

$$(v \cdot \nabla \psi) + \varrho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \varrho \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot q_z \right).$$

Denken wir uns nun die einzelnen mit Ladung behafteten Volumenelemente individualisiert, in ähnlicher Weise, wie wir es mit materiellen Volumenelementen zu tun gewöhnt sind,

und fassen wir ψ als eine Eigenschaft des bewegten Ladungselementes auf, dann ist die zeitliche Änderung von ψ :

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot q_z.$$

Wir kommen somit zu der Gleichung:

$$(28) \quad \operatorname{div} \mathfrak{f} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \cdot \frac{D\psi}{Dt}.$$

Diese letzte Gleichung ist von besonderem Interesse im Hinblick auf eine von Abraham kürzlich veröffentlichte Theorie der Gravitation.¹⁾ In einem Gebiete, wo das elektrische Feld Null ist, befolgen nämlich die von mir mit $f_x, f_y, f_z, i\varphi$ bezeichneten Größen dieselben Gleichungen, wie die Größen, die Abraham $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z, \mathfrak{F}_u$ nennt, nur mit dem Unterschied, daß Abraham setzt:

$$\operatorname{Div} \mathfrak{F} = -4\pi\gamma \cdot v,$$

wo γ die Gravitationskonstante, v die Massendichte bedeutet, während für meinen Vektor die eben hergeleitete Gleichung gilt:

$$\operatorname{Div}(\mathfrak{f}, i\varphi) = \rho \cdot \frac{D\psi}{Dt}.$$

Man würde also von meinen Ansätzen aus zu der Abraham'schen Gravitationstheorie kommen, wenn man die Annahme machen wollte, daß da, wo materielle Masse ist, ein konstantes Anwachsen der Größe ψ mit der Zeit stattfindet. Die infolgedessen aus dem Massenteilchen hervorquellende Strömung \mathfrak{f} wäre das Gravitationsfeld. Da aber eine solche Annahme physikalisch absurd ist, so ist es ausgeschlossen, auf eine so einfache Weise aus meinen Ansätzen zu einer Gravitationstheorie zu kommen. Wie das wahrscheinlich zu geschehen hat, habe ich in der Einleitung (p. 512 u. 513) angedeutet.

Im folgenden Kapitel werde ich zunächst zu untersuchen haben, ob die Existenz unteilbarer Elektronen mit meinen Ansätzen vereinbar ist.

Greifswald, Physikalisches Institut, 6. Januar 1912.

1) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 13. p. 1. 1912.

(Eingegangen 9. Januar 1912.)